Dispense di Matematica Finanziaria

Anno Accademico 2016-2017

Prof. Aggr. Arsen Palestini

MEMOTEF, Sapienza Università di Roma

Arsen.Palestini@uniroma1.it

Indice

Capitolo 1

Introduzione alle operazioni finanziarie

Iniziamo queste dispense di Matematica Finanziaria con un approccio inizialmente discorsivo e senza formule, per permettere alle lettrici ed ai lettori di toccare con mano fin da subito le tematiche di questa materia, prima di analizzare qualsiasi formula o modello finanziario. Ho cercato di mantenere un approccio divulgativo, adatto a studenti e studentesse dei primi anni dei Corsi di Laurea di tipo economico o aziendale, inserendo di volta in volta qualcosa di più rigoroso e tecnico. Ma il testo é disseminato di esercizi svolti ed esempi, per cercare di dissipare le nubi dell'incomprensione appena si formano. A seconda della necessità, in questo e nei prossimi Capitoli verranno forniti alcuni richiami di Matematica Generale, non eccessivamente approfonditi, che chi legge potrà sviluppare nei testi consigliati nella Bibliografia finale.

Chiaramente, non ho la pretesa di esaurire tutte le tipologie di esercizi e applicazioni: essendoci vari linguaggi, notazioni ed espressioni alla base della Matematica Finanziaria, ed é sufficiente leggere anche soltanto due diversi testi per rendersene conto, il mio appassionato consiglio é comunque quello di consultare anche ulteriori eserciziari e libri di teoria (non solo in Matematica Finanziaria!). Nei vari Capitoli ci saranno dei suggerimenti sui testi da consultare. In generale, mi sentirei di consigliare come particolarmente validi per quasi tutti gli argomenti trattati un testo classico come [M] e due buoni libri recentemente usciti come [R] ed [S1] per la teoria, e [LR], [S2] e [T] per gli esercizi. Per approfondimenti di livello tecnicamente avanzato, più adatti agli sviluppi successivi della materia, anche in Lauree Magistrali o corsi di Dottorato di Ricerca, suggerisco invece [JMV], [PR] oppure [V].

1.1 Situazioni finanziarie e criteri di preferenza

Cominciamo ad inquadrare alcune situazioni della vita reale in cui ci possiamo trovare a contatto con delle situazioni finanziarie e a formulare delle domande in proposito. La formalizzazione matematica di queste situazioni, e le risposte ai problemi, saranno successivamente descrivibili con gli strumenti che via via acquisiremo.

Esempio 1. *Un BoT (Buono ordinario del Tesoro) a 6 mesi é un titolo obbligazionario emesso e venduto in aste periodiche dal Ministero dell'Economia e delle Finanze. Ci sono BoT da 3, 6 o 12 mesi, e vengono rimborsati in un'unica soluzione, alla scadenza. Ad esempio, possiamo acquistare un BoT al tempo* $t_1 = 0$ *a 965 euro che garantisce alla scadenza* $t_2 = 1/2$ *(6 mesi vuol dire la metà di un anno) il rimborso di 1.000 euro. Come possiamo valutare il valore di più titoli con varie scadenze? La valutazione in che modo dipende dal tasso d'interesse applicato? E in che modo dipende dall'istante di valutazione?*

Esempio 2. *Alla Banca Palustre dell'Agro Pontino, accendiamo un conto corrente depositando 2.000 euro, e ci viene garantito un tasso annuo d'interesse dell'*$1,7\%$ *(molto ricco, rispetto ai tassi correnti). Le uniche spese che ci vengono richieste in questo contratto sono 5 euro per i bolli annuali e 3 euro per il rilascio e l'utilizzo di una carta Bancomat. Qual é il saldo sul nostro conto alla fine dell'anno? E come crescerà negli anni successivi? E se ci viene proposto un tasso mensile d'interesse dello* $0,2\%$, *quale delle due proposte é più conveniente?*

Esempio 3. *Vogliamo acquistare un immobile e, dal momento che costa poco e siamo in possesso della somma per comprarlo in contanti, possiamo scegliere se contrarre un mutuo (ad un certo tasso d'interesse fisso), quindi pagando a rate per alcuni anni, oppure pagando tutto immediatamente al momento della vendita. Quale delle due alternative é la più conveniente? E cosa può accadere se il tasso che ci viene proposto é variabile?*

Gli esempi precedenti mostrano come in questi problemi ci siano diversi dati rilevanti per la loro discussione e risoluzione, ma soprattutto due sono i dati cruciali: gli **importi** e i **tempi**. In Matematica Finanziaria, non si può definire un ordine di preferenza senza specificare entrambi, ad esempio, intuitivamente, un gran numero di persone, compreso chi scrive, preferirebbero di gran lunga 50.000 euro disponibili oggi a 5 milioni di euro disponibili tra 37 anni. La prima definizione proposta é proprio quella di *situazione finanziaria*, intesa come punto dello spazio denaro-tempo, o come importo monetario ad una data prefissata.

Definizione 4. *Chiamiamo* ***situazione finanziaria (o prestazione finanziaria)*** *una coppia ordinata* $(x,\ t)$ *consistente nella disponibilità del capitale* x *al tempo* $t \geq 0$.

Mentre il tempo ha comunque un valore positivo, in generale ammettiamo anche la possibilità che il segno di x possa essere negativo, intendendo che x sia un importo in uscita, da dover pagare.

Siccome ogni soggetto o agente economico definisce, consciamente o meno, un ordine di preferenza sulle situazioni finanziarie, qui di seguito elencheremo alcuni postulati, basati sulle normali ipotesi della razionalità umana ed economica, che assumeremo validi in condizioni di certezza. Per condizioni di certezza, intendiamo il fatto che tutto sia perfettamente *deterministico*, cioè che nessun fenomeno di natura *aleatoria* possa accadere. In altre parole, tutto ciò a cui ci riferiamo é vero con probabilità 1, o anche, come da linguaggio comune, al 100%, esattamente come il fatto che domani sorgerà il Sole oppure che dopo la prossima Domenica ci sarà un Lunedì.

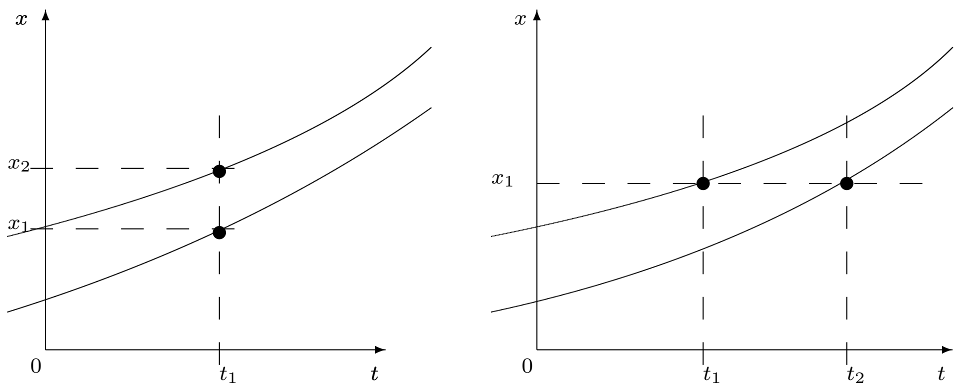
I postulati suddetti (per una trattazione più approfondita vedi [V], Capitolo 1) sono i seguenti:

1. Il possesso di un capitale di segno positivo é vantaggioso per chi lo detiene, ossia per ogni soggetto avere questo bene à¨ preferibile al non averlo, qualunque sia l'importo.

2. La disponibilità temporanea di un capitale altrui é un servizio vantaggioso che, come tale, ha un prezzo. Il soggetto economico che si avvale di tale disponibilità (può anche trattarsi di una banca, di una compagnia assicurativa, ecc.) deve pagare un costo, commisurato all'ammontare del capitale disponibile e ai dati temporali a cui questa operazione si riferisce. Per dati temporali si intendono tempo iniziale e finale, oppure la durata. Generalmente, questo costo é deciso da un contratto stipulato dalle due parti in causa: chi presta e chi prende a prestito (lender e borrower).

3. Date due situazioni finanziarie $(x_1,\ t)$ e $(x_2,\ t)$ allo stesso istante t, di importi positivi x_1 e x_2, à¨ preferita quella di importo maggiore.

4. Date due situazioni finanziarie $(x,\ t_1)$ e $(x,\ t_2)$, di uguale importo x, valutate ad una data antecedente t_0 (ad esempio, $t_0 < t_1 < t_2$), se $x > 0$, é preferita $(x,\ t_1)$, ossia la disponibilità di x é considerata migliore se avviene prima. Simmetricamente, se $x < 0$, quindi dal punto di vista di chi deve pagare l'ammontare x, é preferita la situazione finanziaria $(x,\ t_2)$, perchà¨ la scadenza é posteriore. Si può estendere questo principio affermando che chi é creditore preferisce riscuotere il suo credito alla scadenza anteriore, chi é debitore preferisce risarcire il suo debito alla scadenza posteriore, qualunque sia l'istante di valutazione.



Nel primo grafico $(x_2,\ t_1)$ é preferito a $(x_1,\ t_1)$, nel secondo $(x_1,\ t_1)$ é preferito a $(x_1,\ t_2)$.

Gli ultimi due postulati in realtà fissano dei criteri di preferenza nelle scelte finanziarie. Come é facilmente intuibile, non tutte le situazioni finanziarie sono confrontabili, cioè date due qualsiasi $(x_1,\ t_1)$ e $(x_2,\ t_2)$, alla data t_0, con $t_0 < t_1 < t_2$, se $0 < x_1 < x_2$, non si può stabilire una preferenza tra di esse. Analogamente, nel caso di situazioni di esborso, se $0 > x_1 > x_2$, si tratta di cedere un ammontare minore ma a una scadenza anteriore, quindi non sussiste alcuna dominanza.

Quando costruiremo delle leggi finanziarie di capitalizzazione e di sconto, esse metteranno in relazione diversi capitali ad epoche diverse, e si visualizzeranno come grafici di funzioni ad una variabile sul piano tempo-denaro. Le linee che congiungeranno diverse situazioni finanziarie si potranno considerare come *linee di indifferenza*, cioà¨ nelle quali due punti qualsiasi, corrispondenti a due diverse situazioni finanziarie, si potranno considerare indifferenti o equivalenti.

1.2 Operazioni finanziarie

Possiamo generalizzare il concetto di situazione finanziaria a più di un importo e a più di una data, cambiando leggermente la notazione. Le operazioni finanziarie sono comunemente viste come insiemi, o flussi, di pagamenti (in entrata o in uscita) ognuno dei quali caratterizzato dalla data della propria esigibilità. Consideriamo un generico flusso di importi:

$$\underline{\mathbf{x}} = \{x_1, \ldots, x_m\}$$

non tutti nulli, pagabili alle date dello scadenzario discreto:

$$\underline{\mathbf{t}} = \{t_1, \ldots, t_m\},$$

con $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m$, ed $1 < m < \infty$. In generale, prendiamo come unità di misura gli euro[1] per gli importi x_j e gli anni per le date t_j. La notazione che useremo da ora in poi é tratta da Moriconi [M]. In qualche altro testo, come quelli di Scandolo ([S1], [S2]), un'operazione finanziaria é indicata con la notazione $\mathbf{x}/\mathbf{t} = (x_1, \ldots, x_m)/(t_1, \ldots, t_m)$.

Definizione 5. *La coppia di vettori $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ si chiama **operazione finanziaria**. Se $m = 2$ (sono coinvolti solo 2 pagamenti), l'operazione finanziaria é detta **semplice**.*

Come nelle situazioni finanziarie, il j-esimo importo $x_j < 0$, é un'uscita, se $x_j > 0$, é un'entrata.

Definizione 6. *$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ si chiama **operazione finanziaria di investimento(o investimento)** se tutte le uscite precedono tutte le entrate, **operazione finanziaria di finanziamento(o finanziamento)** se tutte le entrate precedono tutte le uscite.*

Due diverse operazioni finanziarie si possono comporre insieme e sommare, riferendosi ad uno scadenzario comune, costituito dall'unione insiemistica dei due scadenzari di partenza. Se nelle due operazioni ci sono delle date comuni, l'importo a quelle date corrisponderà alla somma algebrica dei due importi di partenza.

Definizione 7. *Date due operazioni finanziarie $\underline{\boldsymbol{x}}'/\underline{\boldsymbol{t}}'$, $\underline{\boldsymbol{x}}''/\underline{\boldsymbol{t}}''$, si definisce **operazione somma $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$** l'operazione ottenuta ridefinendo le due operazioni iniziali sullo scadenzario unione $\underline{\boldsymbol{t}} = \underline{\boldsymbol{t}}' \cup \underline{\boldsymbol{t}}''$ e sommando algebricamente gli importi riferiti alle stesse date.*

Esempio 8. *Consideriamo le due seguenti operazioni finanziarie:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}'/\underline{\boldsymbol{t}}' = \{-20,\ 5,\ -35,\ 120\}/\{0,\ 1/2,\ 1,\ 4/3\},$$

$$\underline{\boldsymbol{x}}''/\underline{\boldsymbol{t}}'' = \{-50,\ -30,\ 95\}/\{0,\ 1,\ 2\}.$$

Nel dettaglio, l'operazione $\underline{\boldsymbol{x}}'/\underline{\boldsymbol{t}}'$ indica le uscite, o spese, di 20 euro all'inizio dell'operazione e di 35 euro dopo 1 anno, e le entrate, o guadagni, di 5 euro dopo 6 mesi e di 120 euro dopo 1 anno e 4 mesi (cioé $4/3$ di anno). Invece, l'operazione $\underline{\boldsymbol{x}}''/\underline{\boldsymbol{t}}''$ indica le uscite di 50 euro all'inizio e 30 euro dopo 1 anno, e l'entrata di 95 euro dopo 2 anni (questa seconda operazione finanziaria é un investimento.

[1] Naturalmente tutte le formule restano le stesse anche con qualsiasi altra moneta: sterlina, dollaro, rublo, yen, ecc.

L'operazione finanziaria somma $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ *risulterà quindi:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-70,\ 5,\ -65,\ 120,\ 95\}/\{0,\ 1/2,\ 1,\ 4/3,\ 2\}.$$

Infatti:

- *le entrate di 5, 120 e 95 euro, ai tempi* $1/2$, $4/3$ *e 2 restano scritte come nella prima operazione;*
- *all'istante 0 si sommano le due uscite 20 e 50, risultando in una sola uscita di 70 euro;*
- *all'istante 1 si sommano le due uscite 35 e 30, risultando in -65.*

1.3 I Titoli di Stato come operazioni finanziarie

Nelle cronache economiche e nell'attualità politica si parla molto di debito pubblico (per una sintesi di alcune informazioni, dati e statistiche relativi agli ultimi anni sul debito e fabbisogno delle amministrazioni statali, ecc. si può consultare il sito della Banca d'Italia dedicato alla finanza pubblica, [BDI], mentre per tutte le informazioni sulle emissioni c'é il sito apposito del Dipartimento del Tesoro, [DT]). Il debito pubblico é il debito che lo Stato contrae con altri soggetti (privati, banche, soggetti stranieri, ecc.) emettendo dei titoli obbligazionari per coprire il suo fabbisogno finanziario.

Definizione 9. *Un **prestito obbligazionario** é un'operazione di scambio monetario con cui aziende o istituzioni pubbliche si finanziano indebitandosi nei confronti degli investitori, ossia i sottoscrittori di tale prestito.*

Definizione 10. *Un **titolo obbligazionario (o obbligazione)** é un contratto in cui due parti si impegnano a scambiarsi importi di denaro in date distinte, e che obbliga l'ente emittente e debitore (a volte detto short side) a rimborsare alla data stabilita il sottoscrittore e creditore (detto long side).*

Definizione 11. *Uno **ZCB (zero coupon bond**, o **titolo a capitalizzazione integrale** o **titolo di puro sconto** o **titolo a cedola nulla))** é un titolo che non prevede alcun pagamento di cedole intermedie, ma in cui gli importi di denaro scambiati sono soltanto il **prezzo di emissione** all'istante iniziale e il **valore nominale (o di rimborso)** alla **maturity (o scadenza)**.*

In sintesi, il possesso di un'obbligazione risulta essere una garanzia per il creditore a ricevere l'importo da parte del debitore. I titoli con cedole a volte sono anche detti **straight bond**, **coupon bond** o **bullet bond**.

1.3.1 I principali Titoli di Stato italiani

Tornando ai titoli di Stato, essi vengono periodicamente emessi dal Ministero dell'Economia e delle Finanze e venduti tramite aste pubbliche. I diritti di credito incorporati nei titoli possono essere corrisposti ai sottoscrittori del prestito sia mediante lo scarto di emissione (ossia la differenza tra il valore nominale e il prezzo di emissione o di acquisto), sia mediante il pagamento di cedole, fisse oppure variabili, durante l'investimento.

I titoli di Stato sono di vario genere, qui di seguito elenchiamo quelli fondamentali (per ulteriori approfondimenti, si può consultare anche il Capitolo V di [S1] oppure il sito $http://www.dt.tesoro.it/it/debito_pubblico/$):

- **Buoni Ordinari del Tesoro (BoT)**: titoli della durata di 3, 6 e 12 mesi, privi di cedole, il cui rendimento é dato dallo scarto di emissione.

- **Certificati del Tesoro Zero Coupon (CTz)**: titoli della durata di 24 mesi, privi di cedole (zero coupon appunto).

- **Buoni del Tesoro Poliennali (BTp)**: titoli della durata di 3, 5, 10, 15 e 30 anni, con cedole fisse semestrali.

- **Certificati di Credito del Tesoro (CCT)**: titoli della durata di 7 anni e cedole variabili semestrali, legate al rendimento dei BoT a 6 mesi più una maggiorazione.

- **BTp Italia**: sono titoli con cedola di durata 4, 6 e 8 anni, emessi per la prima volta nel 2012. La principale novità la cedola variabile, con una parte fissa sommata ad una parte agganciata all'inflazione italiana. Pensati soprattutto per acquirenti residenti, sono stati inventati dopo la crisi del 2011 per riportare una parte del debito pubblico in mani domestiche e renderlo meno soggetto a manovre speculative improvvise.

Ci sono inoltre i Buoni del Tesoro Poliennali indicizzati all'Inflazione Europea, in cui sia il capitale rimborsato a scadenza, sia le cedole semestrali sono rivalutati in base all'andamento dell'inflazione europea, i BOC (Buoni Obbligazionari Comunali), anch'essi poliennali, emessi dai Comuni, i nuovi CCTeu, nati a giugno 2010, ed altri ancora, emessi occasionalmente in corrispondenza di determinate esigenze di cassa.

La modalità standard di collocamento dei titoli di Stato utilizzata in Italia é l'asta, articolata in due tipologie fondamentali: l'asta competitiva (BoT) e l'asta marginale (per i BTp, CCT, CTz). In entrambi i casi sono fissati i volumi dell'emissione, ma non il prezzo, per cui l'ammontare di denaro ricavato dallo Stato ogni volta che si indebita é una quantità incerta, o aleatoria. Sul sito

Internet del Ministero del Tesoro, ci sono anche alcune interessanti infografiche sui costi medi di emissione, la composizione dello stock di debito, ecc., vedi la pagina *www.dt.tesoro.it/it/infografica/index.html*. Nel sito del Tesoro, si trovano anche molte altre informazioni sulle emissioni, i volumi, i titoli in scadenza, ad esempio nei bollettini trimestrali. Può essere una lettura molto utile e interessante.

Ricordiamo brevemente anche che i Titoli di Stato italiani hanno alcuni gravami fiscali (ad esempio ogni cedola dei BTp é attualmente tassata al $12,5\%$), ma negli esempi e negli esercizi presentati in generale non considereremo queste tasse e prenderemo tutti gli importi al netto, oppure specificheremo quando saranno considerati anche gli effetti della tassazione o di altre spese accessorie.

Esempio 12. *L'operazione finanziaria*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-97,\ 100\}/\{0,\ 1/2\}$$

rappresenta un BoT semestrale di prezzo 97 e valore nominale 100, in euro.

L'operazione finanziaria

$$\underline{\boldsymbol{y}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-95.9,\ 100\}/\{0,\ 2\}$$

rappresenta un CTz di prezzo 95,9 e valore nominale 100, sempre in euro.

Esempio 13. *Vediamo come si può formalizzare un titolo con cedole fisse, ad esempio un BTp, in forma di operazione finanziaria. Supponiamo che la cedola sia uguale a $I > 0$ e invece il prezzo di acquisto e il capitale (anche detto valore nominale) siano rispettivamente $P > 0$ e $C > 0$. Detto $T > 0$ il periodo che intercorre tra un pagamento di cedola e il suo successivo, detto t_1 l'istante di acquisto e detto n il numero delle cedole totali da incassare, l'operazione finanziaria dal punto di vista del sottoscrittore si potrà scrivere come segue:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-P,\ I,\ I, \dots,\ I,\ C+I\}/\{t_1,\ t_1+T,\ t_1+2T, \dots,\ t_1+nT\}.$$

Va notato il fatto che, a seconda della relazione che intercorre tra P e C si utilizza una specifica terminologia: se $P = C$, si dice che il titolo é quotato, o emesso, alla pari, mentre se $P < C$, é sotto la pari, se $P > C$ é sopra la pari (quest'ultimo caso é decisamente raro).

Inoltre, il rapporto I/C é detto ***tasso cedolare*** *del titolo, mentre il* ***tasso nominale annuo*** *corrisponde al prodotto tra il tasso cedolare e il numero di cedole staccate in un anno.*

Esercizio 14. ***Dato un BTp di durata 3 anni, di prezzo d'acquisto*** $P = 945$ ***euro e valore nominale*** $C = 1.000$ ***euro, calcolare il valore di ogni cedola e lo scarto d'emissione se il tasso nominale annuo é del*** 10%.

Essendo il pagamento delle cedole del BTp semestrale, lo scriviamo in forma dell'operazione finanziaria seguente:

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-945,\ I,\ I,\ I,\ I,\ I,\ 1.000 + I\}/\{0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 5/2,\ 3\}.$$

Poichè ogni anno vengono incassate 2 cedole, il valore della singola cedola si ricava dall'equazione:

$$2\frac{I}{1.000} = \frac{10}{100} \implies I = 50 \ \textit{euro}.$$

Lo scarto di emissione é invece dato dalla differenza $C - P = 55$ *euro. Di conseguenza, sostituendo il valore trovato, la forma esatta del BTp diventa:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-945,\ 50,\ 50,\ 50,\ 50,\ 50,\ 1.050\}/\{0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 5/2,\ 3\}.$$

1.3.2 Rendimenti semplici lordi e netti

Esaminiamo brevemente, prima di formalizzare e definire i tassi d'interesse e la capitalizzazione composta, l'elementare questione del rendimento semplice dei titoli obbligazionari, che sarà trattato in modo molto più esteso nei seguenti Capitoli. Restiamo nell'ambito delle operazioni finanziarie semplici, vale a dire le obbligazioni senza cedole, come i BoT e i CTz.

Definizione 15. *Data un'obbligazione priva di cedole* $\{-P,\ C\}/\{t_1,\ t_2\}$, *in cui* P *é il prezzo di acquisto al tempo* t_1, *e che scade in* t_2 *con valore nominale* C, *definiamo il* ***rendimento semplice a scadenza (lordo)*** r_L *come segue:*

$$r_L = \frac{1}{t_2 - t_1}\frac{C - P}{P}. \tag{1.3.1}$$

Come detto in precedenza, le obbligazioni dello Stato sono tassate. In particolare, supponiamo che l'obbligazione precedente venga tassata all'emissione con l'applicazione di un'aliquota del $12,50\%$ sullo scarto di emissione (come il BoT). In questo caso, il suo prezzo diventa

$$\widehat{P} = P + 0.125(C - P) = 0.125C + 0.875P.$$

Siccome dalla formula (1.3.1), la relazione tra valore di rimborso e prezzo é $C = P(1 + r_L(t_2 - t_1))$, di conseguenza la relazione tra i due prezzi diventa $\widehat{P} = P(1+0.125r_L(t_2-t_1))$, da cui possiamo definire anche il rendimento semplice netto.

Definizione 16. *Data un'obbligazione priva di cedole* $\{-P,\ C\}/\{t_1,\ t_2\}$, *in cui* P *é il prezzo di acquisto al tempo* t_1, *e che scade in* t_2 *con valore nominale* C, *e data una tassa di aliquota* A *applicata all'emissione sulo scarto d'emissione, definiamo il* ***rendimento semplice a scadenza (netto)*** r_N *come segue:*

$$r_N = \frac{1}{t_2 - t_1}\frac{C - \widehat{P}}{\widehat{P}} = \frac{1}{t_2 - t_1}\frac{C - P(1 + Ar_L(t_2 - t_1))}{P(1 + Ar_L(t_2 - t_1))}. \tag{1.3.2}$$

Esempio 17. *Tornando all' Esempio 1 del BoT, dai dati specificati, esso corrisponde all'operazione finanziaria semplice* $\{-965,\ 1.000\}/\{0,\ 1/2\}$. *Quindi il prezzo di emissione é 965 euro, il valore nominale é 1.000 euro, lo scarto d'emissione é 35 euro, la maturity é 6 mesi. Applicando (1.3.1), il rendimento semplice a scadenza (lordo) risulta:*

$$r_L = \frac{1}{1/2}\frac{1.000 - 965}{965} = 7,25\%.$$

Supponiamo di applicare un'aliquota del $12,50\%$ *sullo scarto di emissione. Possiamo calcolare il rendimento semplice a scadenza (lordo) in 2 diversi modi.*

1. *O applichiamo direttamente la formula (1.3.2), avendo:*

$$r_N = \frac{1}{1/2}\frac{1.000 - 965(1 + 0.125 \cdot 0.0725 \cdot 0.5)}{965(1 + 0.125 \cdot 0.0725 \cdot 0.5)} = 6,319\%.$$

2. *Oppure consideriamo fin dall'emissione la tassa da pagare, considerando quindi un titolo equivalente che abbia come prezzo di acquisto il prezzo decurtato della tassa, quindi* $\widehat{P}$, *e su quello calcoliamo il normale rendimento (lordo). Quindi: dato il titolo*

$$\{-P - A(C - P),\ C\}/\{t_1,\ t_2\} =$$

$$= \{-965 - 0.125(1.000 - 965),\ 1.000\}/\{0,\ 1/2\} =$$

$$= \{-969,375,\ 1.000\}/\{0,\ 1/2\},$$

il rendimento risulta:

$$r_N = \frac{1}{1/2}\frac{1.000 - 969.375}{969,375} = 6,318\%.$$

Da notare la leggerissima differenza tra i 2 risultati, dovuta a una diversa approssimazione, dell'ordine trascurabile dello $0,001\%$.

1.3.3 Il rateo e la quotazione dei titoli con cedole

Quando la periodicità di un titolo con cedole non coincide esattamente con l'esigibilità delle stesse, ma é sfasata, il pagamento della cedola non avviene alla data di scadenza, ma all'interno del periodo. Vale a dire, se l'emissione avviene in t_0, e il periodo é T, la prima cedola non viene staccata in $t_1 = t_0 + T$ ma in un'altra data $\widetilde{t_1} < t_1$. In questo caso, il periodo di godimento della cedola sarà sempre comunque di lunghezza T, per l'esattezza sarà compreso tra $\widetilde{t_1}$ e $\widetilde{t_1} + T$, a sua volta minore di t_2, e via dicendo.

Definizione 18. *Si chiama* ***rateo (o rateo d'interesse)*** *della cedola I al tempo di acquisto t il seguente importo:*

$$R_i = I \cdot \left(1 - \frac{\widetilde{t_1} - t_0}{T}\right). \tag{1.3.3}$$

Il rateo dunque quantifica il vantaggio per il sottoscrittore di avere una cedola staccata in anticipo, e che quindi assume una sua importanza al momento della valutazione, ossia della quotazione, di un titolo. I titoli obbligazionari vengono acquistati sul mercato primario tramite un'asta, ma poi possono venire successivamente venduti e comprati su un mercato secondario (laddove possono avvenire, e avvengono, manovre speculative). Il valore, più quotazione, di un titolo sui listini, non é in generale quello di acquisto al primo istante, ma quello sul mercato secondario, che é decurtato dal rateo, riferito alla differenza temporale tra istante di acquisto e istante di distacco della prima cedola. Chiaramente, se essi coincidono, il rateo é nullo.

Quindi bisogna considerare 2 diverse quotazioni: il cosiddetto **corso tel quel**, che é il prezzo effettivamente da pagare per il titolo, e il **corso secco**, quello che appare sui listini ed é la differenza tra corso tel quel e rateo.

Più estensivamente, lo scambio a corso secco é soltanto sul valore nominale del titolo, senza considerare gli interessi parziali maturati, mentre quello a corso tel quel tiene conto anche delle cedole staccate fino a quell'istante, se ce ne sono, e del rateo relativo al periodo trascorso.

Esempio 19. *Consideriamo il seguente titolo con 4 cedole semestrali, di cui la prima viene staccata dopo 4 mesi dall'acquisto in $t_0 = 0$, di valore nominale 100, e determiniamone tutte le caratteristiche:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-95,\ 2,\ 2,\ 2,\ 102\}/\{0,\ 4/12,\ 10/12,\ 16/12,\ 22/12\}.$$

Cominciamo col vedere che il titolo é quotato sotto la pari, in quanto $95 < 100$, e che il suo tasso cedolare e il suo tasso nominale sono rispettivamente del 2%

e del 4% *(2 cedole all'anno). 95 rappresenta il corso tel quel del titolo, mentre il rateo, poichè la differenza tra tempo di acquisto e distacco della prima cedola é di 4 mesi e il periodo é 6 mesi, dalla formula (1.3.3) vale:*

$$2 \cdot \left(1 - \frac{4/12}{6/12}\right) = \frac{2}{3} = 0,66666 \text{ } euro,$$

e di conseguenza il corso secco a cui il titolo viene quotato risulta $95 - 0,666666 = 94,333333$ *euro.*

Esercizio 20. ***Dato il BTp semestrale seguente:***

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-93.2,\ 4.1,\ 4.1,\ 4.1,\ 4.1,\ 4.1,\ 104.1\}/$$

$$\{0,\ 1/12,\ 7/12,\ 13/12,\ 19/12,\ 25/12, 31/12\},$$

la cui prima cedola viene staccata dopo 1 mese dall'emissione, calcolarne il rateo e il corso secco.

La cedola semestrale del BTp é 4,1 *euro, quindi il tasso nominale risulta* 4,1% *e il tasso cedolare il* 2,05%*.*

Usando (1.3.3), otteniamo:

$$R_i = 4,1 \cdot \left(1 - \frac{1/12}{6/12}\right) = 3,41\overline{6} \text{ } euro,$$

e il corso secco del titolo é quindi $93,2 - 3,41\overline{6} = 89,78\overline{3}$ *euro.*

1.4 La crisi dei debiti pubblici europei del 2010-2011

Il più importante avvenimento finanziario dell'ultimo decennio é sicuramente stata la grande crisi del debito pubblico di molti Paesi dell'Europa, sia fuori dall'area Euro (come l'Islanda) che nell'area Euro (principalmente e drammaticamente la Grecia, ma anche Portogallo, Irlanda fino a lambire anche Italia e Spagna).

Nata probabilmente in conseguenza e come propagazione della crisi dei mutui *subprime* negli USA (consiglio di vedere il film *The big short - La grande scommessa*, che racconta nei dettagli gli incredibili eventi nella finanza americana negli anni 2007-2008), la crisi ha colpito alcuni Stati dell'Unione Europea sia sui fondamentali dell'Economia (contrazione del PIL e scarsa crescita, aumento della disoccupazione, difficoltà nella sostenibilità del bilancio pubblico) che sulla possibilità di riuscire a rimborsare i titoli dei propri stock di debito pubblico.

Non poter rimborsare le proprie obbligazioni provoca un **default**, ossia un fallimento, e tra i casi più recenti e clamorosi di default in anni recenti ci sono sia degli Stati, come l'Argentina, che delle grandi aziende, come la Parmalat.

Ci sono vari tipi di default, che corrispondono a varie forme di mancato rimborso delle proprie obbligazioni: un nuovo scadenzamento delle cedole, il taglio del valore delle cedole a rimborso, oppure quello più standard, vale a dire il taglio del capitale da rimborsare all'ultima scadenza (quest'ultimo é anche detto *haircut*), anche di un 50% o 70%. La Grecia ha affrontato tale haircut nella primavera del 2012 e successivamente, nel novembre 2012, ha ulteriormente ridotto il suo stock di debito pubblico mediante un **buyback**, ossia un riacquisto di una parte delle proprie obbligazioni in circolazione da parte dello Stato. Naturalmente il default, come anche le sue varianti più soft, provoca enormi perdite per i creditori dell'ente insolvente, e negli ultimi anni sono stati utilizzati dei titoli derivati a mò di polizza assicurativa sui default detti **credit default swaps**.

Alla Grecia, e successivamente a Portogallo e all'Irlanda, sono stati concessi prestiti da parte del Fondo Monetario Internazionale, a patto di controllare il processo di rientro su una traiettoria di debito sostenibile (tramite una serie di riforme più o meno imposte), e nel frattempo l'Europa ha predisposto un fondo cosiddetto salva-stati, l'**EFSF (European Financial Stability Facility)**, a cui successivamente ne é seguito un altro, l'**ESM (European Stability Mechanism)**. I Paesi europei hanno linee e posizioni diverse, ma sembra essere interesse di tutti, per ora, preservare la moneta unica, che sarebbe gravemente messa in discussione se i suoi Stati andassero in default.

Ma nonostante questi interventi, nessuno é realmente in grado di dire con certezza se e quando altri Paesi finiranno in default, e se e quando ci sarà un riassestamento regolare del mercato e una definitiva uscita dalla crisi.

1.4.1 Lo spread

Dall'esplosione della crisi in poi, tutti i giornali e i telegiornali hanno dato grande importanza alla cronaca finanziaria, e in particolare é stata utilizzata, a volte quasi ossessivamente, una nuova parola che é prepotentemente entrata nel nostro linguaggio: lo **spread**.

Cosa esattamente é lo spread? Fondamentalmente, si tratta di una *differenza di rendimento* tra due titoli obbligazionari. Parlando semplicemente, nel caso delle obbligazioni di Stato, tanto più risulta alto il rischio, tanto più deve essere alto il rendimento. Come dire che uno Stato meno sicuro (sicurezza vuol dire sicurezza di rimborso) per poter vendere le proprie obbligazioni é costretto a offrire dei rendimenti più alti.

Nel linguaggio mediatico, per spread si intende normalmente lo spread tra il titolo con cedole italiano (BTp) e quello analogo tedesco (*Bünd*), entrambi decennali, intendendo che il titolo tedesco venga preso come titolo più sicuro dell'area Euro. In realtà lo spread si può calcolare tra due qualsiasi titoli, francesi, spagnoli, finlandesi, ecc.

Lo spread é un indicatore di grande importanza, in quanto le sue fluttuazioni, giornaliere in quanto derivano dai movimenti di mercato, corrispondono ai livelli di rischio. Se molti investitori vendono BTp, diffondono un segnale di sfiducia, i BTp vengono considerati più rischiosi e al momento dell'asta l'Italia dovrà offrire rendimenti maggiori per venderli. Se al contrario vengono comprati, il segnale é di distensione, i BTp vengono percepiti come meno rischiosi e il loro rendimento scende.

Va chiarita una cosa: un rendimento alto é positivo per chi detiene i titoli, sempre se saranno rimborsati, ma é negativo per chi li emette. In particolare, l'Italia ogni anno, avendo oltre 2.200 miliardi di euro di debito pubblico (a inizio 2017), paga ogni anno decine e decine di miliardi soltanto di interessi sul proprio debito. Un ulteriore aumento dei rendimenti significherebbe un sempre maggiore rischio di default.

Infine, vediamo un esempio semplice di calcolo dello spread:

supponiamo che 2 Paesi, la Prussia e la Gallia Cisalpina, emettano 2 titoli obbligazionari di durata 1 anno, senza cedole, e senza ritenute fiscali né spese aggiuntive. Chiamiamo BoP e BoGC i rispettivi titoli, con queste caratteristiche:

$$\mathbf{BoP} = \{-95,\ 100\}/\{0,\ 1\}.$$

$$\mathbf{BoGC} = \{-98,\ 100\}/\{0,\ 1\}.$$

Chiamando i il tasso d'interesse annuo, che definiremo in seguito, il BoP ha un rendimento dato da:

$$-95 + 100(1+i)^{-1} = 0 \iff 100 = 95 + 95i \iff i = \frac{5}{95} = 5,26\%,$$

mentre il BoGC ha un rendimento dato da:

$$-98 + 100(1+i)^{-1} = 0 \iff 100 = 98 + 98i \iff i = \frac{2}{98} = 2,04\%.$$

Quindi il BoGC garantisce un rendimento minore, ed é considerato meno rischioso dal mercato. Lo spread tra i due titoli é la differenza tra i rendimenti: $5,26 - 2,04 = 3,22$ quindi, usando il tipico linguaggio finanziario, pari a 322 **punti base**.

Capitolo 2

Leggi finanziarie intertemporali

Qui introduciamo le nozioni fondamentali delle leggi finanziarie in condizioni di certezza, cioè non tenendo conto di alcun elemento aleatorio, come se nessun avvenimento esterno al nostro investimento incidesse su di esso e sulla sua evoluzione. Parliamo di evoluzione, perchè le leggi finanziarie dipendono dal tempo, e da tempi antichissimi l'impiego nel tempo di un bene, o di una quantità di denaro, in qualsiasi forma, é compensato da un successivo pagamento in interessi. Sono molte le motivazioni alla base di questo fatto, e su cui non é il caso di addentrarsi, ci basti pensare alla più intuitiva: la svalutazione nel tempo del denaro per via dell'inflazione, che incide direttamente sul costo della vita di ognuno e ognuna di noi.

Quindi la descrizione delle leggi finanziarie che si instaurano passa attraverso la scrittura rigorosa di un legame funzionale tra capitale investito al tempo iniziale e importo maturato, comprendente l'interesse, in un qualsiasi istante successivo. Nel prosieguo di questo Capitolo, in cui verrà introdotta la terminologia necessaria, ci baseremo in particolare sugli approcci seguiti in ([DD] e [R]).

2.1 Capitalizzazione e attualizzazione

Da ora in avanti, indicheremo con:

- $C > 0$ il **capitale iniziale** investito;
- $I > 0$ l'**interesse** relativo all'impiego di C per tutta la durata dell'investimento;
- $M > 0$ il **montante** di C alla scadenza dell'investimento.

All'istante concordato come scadenza dell'investimento, il debitore dovrà versare al creditore l'importo corrispondente al montante, legato al capitale iniziale e all'interesse dalla semplice relazione additiva:

$$M = C + I. \tag{2.1.1}$$

La (2.1.1) mette in evidenza la dipendenza del montante dal capitale iniziale, tramite una **legge di capitalizzazione**, che successivamente definiremo in modo formale. Se invece volessimo esplicitare l'interesse in funzione degli altri due importi, potremmo attribuirgli il significato di **sconto**, espresso come differenza tra il capitale maturato in caso di investimento e quello non investito. Usiamo la lettera S (nei testi é più spesso usata la lettera D, da *discount*):

$$S = M - C. \tag{2.1.2}$$

Questo é un esempio di come, nella Matematica utilizzata nelle varie formalizzazioni economiche, uno stesso strumento o concetto possa essere interpretato in modi differenti. Abbiamo dunque risposto alla domanda Qual é l'importo maturato al tempo finale dell'investimento dal capitale C? con il montante M. Poniamoci ora la domanda inversa: Quale capitale bisogna investire al tempo iniziale per ottenere un montante finale M? e per rispondere dovremo invertire la legge di capitalizzazione che associa C ad M e definire un'operazione di **attualizzazione o di sconto** (o anche, con un linguaggio meno moderno, di **anticipazione**): C sarà definito il **valore attuale** di M al tempo iniziale.

$C \longrightarrow M$	$C \longleftarrow M$
capitalizzazione	**attualizzazione**

A questo punto, introduciamo la variabile tempo t e fissiamo l'intervallo (contenuto nella semiretta positiva dei tempi) $[t_0,\ t_1]$ come periodo di durata dell'investimento. In questo modo, la legge di capitalizzazione che introdurremo renderà equivalenti le situazioni finanziarie $(t_0;\ C)$ e $(t_1;\ M)$. Inoltre, indichiamo con:

- $\dfrac{M-C}{C}$ l'**interesse per unità di capitale iniziale relativo a** $[t_0,\ t_1]$;
- $\dfrac{M-C}{M}$ lo **sconto per unità di montante relativo a** $[t_0,\ t_1]$.

Nel caso in cui le date dell'investimento siano $t_1 = 1$, $t_0 = 0$, e quindi l'investimento duri 1 anno, le quantità precedentemente definite sono rispettivamente il **tasso annuo di interesse** i (da non confondere col numero immaginario $i = \sqrt{-1}$ dell'insieme dei numeri complessi) e il **tasso annuo di sconto** d.

Definiamo ora rigorosamente la legge di formazione del montante, considerandola come una funzione dipendente dal tempo ma anche, parametricamente, dal capitale iniziale.

Definizione 21. *Si chiama* ***legge di capitalizzazione (o funzione montante)*** *ogni funzione continua* $M : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, *tale che:*

1. $M(t; C) > 0$ *per ogni* $t \geq 0$ *e per ogni* $C > 0$;
2. $M(t; C + D) = M(t; C) + M(t; D)$ *per ogni* $t \geq 0$ *e per ogni* $C,\ D > 0$;
3. $M(t_1; C) < M(t_2; C)$ *per ogni* $t_2 > t_1 \geq 0$ *e per ogni* $C > 0$;
4. $M(0; C) = C$ *per ogni* $C > 0$.

Le ipotesi poste vengono dalla razionalità degli agenti economici, o più semplicemente dal buon senso: la 1) afferma che il montante deve essere positivo ad ogni istante, la 2) che é additivo rispetto ai capitali, la 3) che al passare del tempo il montante aumenta a parità di capitale iniziale, la 4) che se non c'é alcun investimento, come dire che la durata dell'investimento é nulla, il capitale iniziale resta così com'é. Piuttosto intuitivo é anche il seguente risultato:

Proposizione 22. *Dati i capitali* $D,\ C_1,\ C_2 > 0$, *con* $C_2 > C_1$, *a qualsiasi istante* $t > 0$ *si ha:*

1. $M(t; D) > D$;
2. $M(t; C_2) > M(t; C_1)$.

Dimostrazione. La dimostrazione di 1) é immediata. Date le ipotesi della definizione di legge di capitalizzazione, si ha, per l'ipotesi 3), che $M(t; D) > M(0; D)$ per ogni $t > 0$. Inoltre, per l'ipotesi 4), $M(0; D) = D$, quindi $M(t; D) > D$ in ogni istante t successivo all'istante iniziale. Anche la 2) é piuttosto semplice, e segue dalla proprietà di additività 2) della definizione: se $C_2 > C_1$, esisterà un numero positivo H tale che $C_2 = C_1 + H$. Poichè

$$M(t; C_2) = M(t; C_1 + H) = M(t; C_1) + M(t; H),$$

e $M(t; H) > 0$ per la positività della $M(\cdot)$, allora

$$M(t; C_2) = M(t; C_1) + M(t; H) > M(t; C_1).$$

$\square$

Definizione 23. *Data una legge di capitalizzazione* $M(\cdot)$, *si chiama* ***legge di attualizzazione (o funzione di sconto)*** *associata ad* $M(\cdot)$ *la funzione continua* $A : [0, +\infty) \times [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, *tale che per ogni* $t \in [0, +\infty)$ *e per ogni* $C > 0$, *vale la relazione:*

$$M(t; A(t; C)) = C.$$

Corollario 24. *Ogni legge di attualizzazione $A(\cdot)$ gode delle proprietà:*

1. $A(t; C) > 0$ *per ogni* $t \geq 0$ *e per ogni* $C > 0$;
2. $A(t_1; C) > A(t_2; C)$ *per ogni* $0 \leq t_1 < t_2$ *e per ogni* $C > 0$;
3. $A(0; C) = C$ *per ogni* $C > 0$.

Esercizio 25. ***Dimostrare che, dato un qualsiasi capitale iniziale*** $C > 0$***, la funzione*** $M(t; C) = C(t^3 + 1)$ ***é una legge di capitalizzazione per ogni*** $t \in [0, +\infty)$***.***

Verifichiamo le 4 proprietà della legge di capitalizzazione:

- $C(t^3 + 1)$ *é somma di due quantità nonnegative se* $t \geq 0$*, quindi* $M(\cdot)$ *é positiva in* $[0, +\infty) \times [0, +\infty)$;
- $M(t; C+D) = (C+D)(t^3+1) = C(t^3+1)+D(t^3+1) = M(t; C)+M(t; D)$;
- *dati* $t_1, t_2 \in [0, +\infty)$*, se* $t_1 > t_2$ *si ha che* $t_1^3 > t_2^3$*, da cui* $M(t_1; C) > M(t_2; C)$;
- *sostituendo in* $t = 0$*, si ha* $M(0; C) = C(0^3 + 1) = C$.

Essendo verificate tutte e 4 le proprietà della definizione, $M(t; C)$ *é effettivamente una legge di capitalizzazione sul semiasse positivo dei tempi.*

Ripensiamo ora brevemente alla proprietà 2) e alla dimostrazione della sua validità. Pare abbastanza ovvio che essa sia rispettata ogni volta che il capitale iniziale sia un fattore che moltiplica una funzione del tempo. Si può dimostrare (e per la teoria sottostante vedi [R], Capitolo 1) che le leggi di capitalizzazione $M(t; C)$ sono tutte e sole quelle del tipo $M(t; C) = C \cdot r(t)$, laddove $r(t)$ é detto **fattore di capitalizzazione (o fattore montante)**. Le proprietà del fattore di capitalizzazione sono analoghe, a parte la dipendenza da C, a quelle della legge di capitalizzazione: positivià, continuità, non decrescenza.

Pertanto sussiste un'analogia con la legge di attualizzazione, che sarà anch'essa moltiplicativa, ossia $A(t; C) = C \cdot v(t)$, laddove $v(t)$ é detto **fattore di attualizzazione (o fattore di sconto)**, e vale la relazione di reciprocità:

$$r(t) \cdot v(t) = 1, \qquad \forall\ t \in [0, +\infty).$$

Nel caso dell'esercizio precedente, $r(t) = t^3 + 1$, $v(t) = \dfrac{1}{t^3 + 1}$.

Bisogna fare attenzione a non confondere la moltiplicazione tra funzioni (in questo caso) con la composizione di funzioni. Essendo la legge di capitalizzazione un prodotto tra C e $r(t)$, per tornare indietro con l'operazione di attualizzazione al capitale iniziale C, é necessario dividere per $r(t)$, quindi moltiplicare per il fattore di sconto $v(t) = \frac{1}{r(t)}$. Nei prossimi paragrafi introdurremo le leggi di capitalizzazione e attualizzazione più comuni.

2.1.1 Regime dell'interesse semplice

Il primo regime finanziario che analizziamo é quello in cui l'interesse é proporzionale sia al capitale iniziale C sia alla durata dell'impiego t, quindi quando $I = C \cdot i \cdot t$, laddove $i > 0$ é il tasso annuo di interesse. Annuo perchè a 1 anno ($t = 1$) considerando un capitale iniziale normalizzato a 1, i corrisponderà esattamente all'interesse maturato. Questo regime di capitalizzazione é detto **semplice (o lineare)**. Solitamente, i tassi d'interesse sono nell'ordine del centesimo, e scritti tramite percentuali (ad esempio $0,13 = 13\%$, $0,02 = 2\%$, ecc.). Il fattore di capitalizzazione risulta essere $r(t) = 1 + it$, e di conseguenza la legge di capitalizzazione in regime semplice prende la forma:

$$M(t) = C(1 + it), \qquad t \in [0, +\infty).$$

Conseguentemente il fattore di attualizzazione é $v(t) = \frac{1}{1 + it}$.

Esercizio 26. ***Calcolare il montante ottenuto da un investimento di capitale iniziale di 1.000 euro al tasso annuo del*** 3% ***dopo 2 anni e 3 mesi nel regime dell'interesse semplice.***

Useremo la formula diretta del montante, dopo aver trasformato la percentuale in numero razionale o decimale ($3\% = 3/100 = 0,03$*) e i 2 anni e 3 mesi in numero, razionale o decimale (2 anni e 3 mesi* $= 2 + 1/4$ *di anno* $= 9/4 = 2,25$*). Avremo:*

$$M = C(1 + it) = 1.000 \left(1 + \frac{3}{100} \cdot \frac{9}{4}\right) = 1.000 \left(\frac{427}{400}\right) = 1.067,5 \text{ euro.}$$

Esercizio 27. ***In quanto tempo un capitale di 520 euro, investito in regime di capitalizzazione semplice al tasso annuo dell'***1% ***genera un montante di 600 euro?***

In questo caso, dovendo ricavare il tempo, la formula va invertita:

$$M = C(1 + it) \implies \frac{M}{C} - 1 = it \implies t = \frac{1}{i}\left(\frac{M}{C} - 1\right).$$

Sostituendo i dati del problema, otterremo:

$$t = \frac{1}{\frac{1}{100}} \left(\frac{600}{520} - 1 \right) = 100 \cdot \frac{8}{52} = 15,384615 \ \textit{anni.}$$

L'esercizio potrebbe essere finito qui, ma chiaramente dal punto di vista operativo avere un numero decimale di anni serve a poco. Vale la pena quindi spendere qualche parola su come cambiare l'unità di misura del risultato ottenuto in anni, mesi, giorni (si potrebbe arrivare anche a ore e minuti, ma poi il concetto non cambia). Gli anni trovati sono 15, cioè 15 é la parte intera del numero trovato, e poi ce ne sono ulteriori 0,384615. Per trasformare questo numero in mesi, basta moltiplicarlo per 12, e avremo:

$$0,384615 \cdot 12 = 4,61538 \ \textit{mesi.}$$

Quindi abbiamo 4 mesi interi e ulteriori 0,61538. Per calcolare quest'ultimo numero decimale in termini di giorni, lo moltiplichiamo per 30, perchè il mese dell'anno commerciale é appunto di 30 giorni (e di conseguenza, l'anno commerciale é di 360 giorni):

$$0,61538 \cdot 30 = 18,4614 \ \textit{giorni.}$$

Moltiplicando poi per 24 otterremo le ore, ecc. In definitiva, il tempo richiesto dall'esercizio é quindi di 15 anni, 4 mesi e 18 giorni.

2.1.2 Regime dello sconto commerciale

La seconda forma di capitalizzazione che incontriamo é quella cosiddetta del **regime dello sconto commerciale**, che a differenza del regime semplice, il cui montante é una funzione lineare del tempo, qui ha invece una forma iperbolica (e infatti in alcuni testi é denominata di **capitalizzazione iperbolica**). In questo caso lo sconto S viene computato proporzionalmente alla durata t, oltre che al montante M. Detto s lo sconto per unità di montante, quindi $s = \frac{i}{1+i}$, si ha:

$$S = M \cdot s \cdot t \implies C = M - S = M(1 - s \cdot t),$$

da cui la legge di capitalizzazione risulta:

$$M(t) = \frac{C}{1 - st}, \qquad \forall \ t \in \left[0, \frac{1}{s}\right).$$

Va notato il fatto che il dominio della $M(t)$ nel regime di sconto commerciale non risulta definita su tutto il semiasse positivo dei tempi, ma ha come soglia, non compresa, $1/s$, in cui ha un asintoto verticale, mentre per valori maggiori di tale soglia il montante risulta negativo, e quindi perde ogni significato economico.

Volendo fare un minimo di analisi parametrica, possiamo mettere in evidenza che, data la relazione tra s e i, quando i é molto piccolo e vicino a 0 lo é anche s, e di conseguenza l'intervallo di definizione di $M(t)$ é molto grande. Al limite per $s = 0$, sarebbe 0 anche lo sconto S e non ci sarebbe alcuna capitalizzazione, cioè il montante maturato resterebbe uguale al capitale iniziale C in ogni istante.

Esercizio 28. ***Dato un investimento di 2 anni in regime di sconto commerciale al tasso annuo di interesse dell'*** $1,5\%$***, calcolare il valore attuale di 1.290 euro.***

Prima di tutto, applicando la relazione tra tasso annuo di interesse e tasso annuo di sconto ricaviamo s:

$$s = \frac{i}{1+i} = \frac{15/1000}{1015/1000} = 0,014778.$$

Poi applichiamo la formula e la invertiamo:

$$M = \frac{C}{1-st} \implies C = M(1-st) \implies$$

$$\implies C = 1.290 \cdot (1 - 2 \cdot 0,014778) = 1.251,87276 \textit{ euro.}$$

Da notare la vicinanza dei due tassi: quello di interesse annuo é $1,5\%$*, mentre quello di sconto annuo risulta leggermente inferiore:* $1,47\%$.

Esercizio 29. ***Calcolare il tasso annuo di interesse a cui un investimento di 3.000 euro in regime di sconto commerciale produce un montante di 3.500 euro in 5 anni e 5 mesi.***

Cominciamo trasformando il tempo in un numero decimale o frazionario: 5 anni e 5 mesi significa $5 + \frac{5}{12} = \frac{65}{12}$ *di anno, o anche* $5,41\overline{6}$ *anni. La formula dello sconto commerciale, mantenendo s come incognita, diventa:*

$$C = M - M \cdot s \cdot t \implies s = \frac{M-C}{M \cdot t} = \frac{3.500 - 3.000}{3.500 \cdot 5,416666} = 0,026373.$$

Infine, per ricavare i, dobbiamo invertire la formula del tasso annuo di sconto:

$$s = \frac{i}{1+i} \implies i = \frac{s}{1-s} = \frac{0,026373}{1-0,026373} = 0,027087,$$

quindi il tasso i richiesto é circa il $2,7\%$*. Anche in questo caso i risulta leggermente maggiore di s.*

2.1.3 Regime dell'interesse composto

Dopo aver visto una legge di capitalizzazione lineare ed una iperbolica, veniamo finalmente al regime finanziario di tipo esponenziale. Per fornire una prima spiegazione intuitiva, immaginiamo una forma di capitalizzazone in cui, istante dopo istante, il montante maturato gioca il ruolo di capitale iniziale e la formazione del montante prosegue continuamente.

Definizione 30. *Un fattore di capitalizzazione $r(t)$ é detto **scindibile** se per ogni $t_1,\ t_2 > 0$, si ha:*

$$r(t_1 + t_2) = r(t_1) \cdot r(t_2).$$

Riferendoci alla definizione di legge di capitalizzazione, $M(t_1 + t_2; C) = M(t_2; M(t_1; C))$, vale a dire il montante al tempo $t_1 + t_2$ coincide con quello maturato fino a t_1, ulteriormente reinvestito fino a t_2.

Definizione 31. *La **legge di capitalizzazione degli interessi composti** é l'unica legge scindibile ed ha la forma:*

$$M(t) = C(1 + i)^t, \tag{2.1.3}$$

dove i é il tasso annuo di interesse.

La proprietà di scindibilità segue in modo piuttosto automatico dalle caratteristiche di una qualsiasi funzione esponenziale, più in generale delle potenze. Come anche nei regimi lineare ed iperbolico, il montante ad un anno corrisponde a $M(1) = C(1 + i)$. In seguito vedremo brevemente come il comportamento di queste funzioni differisce prima e dopo il primo anno di capitalizzazione.

Questo tipo di regime é in assoluto il più importante e quello che tipicamente useremo anche nella trattazione degli argomenti successivi.

Esercizio 32. ***Calcolare il valore attuale di 111 euro in un regime a interessi composti, generati da un investimento a 2 anni e 7 mesi al tasso d'interesse annuo dello*** $0,5\%$***. Successivamente, calcolare l'interesse generato da questo investimento.***

Trasformiamo i 2 anni e 7 mesi in $2 + \dfrac{7}{12} = \dfrac{31}{12}$ *e avremo, invertendo la formula (2.1.3), si ottiene:*

$$C = M(1 + i)^{-t} = 111 \cdot (1,005)^{-31/12} = 109,578996 \text{ euro.}$$

Infine, l'interesse prodotto dall'investimento é uguale a $M - C = 1,421004$ *euro.*

Esercizio 33. ***Consideriamo un regime di capitalizzazione a interessi composti in cui il capitale iniziale investito ammonta a 1.000 euro. Supponendo di applicare un tasso annuo di interesse dell'*** $1,32\%$***, quanto tempo deve durare l'investimento affinchè il montante prodotto arrivi a 1.400 euro?***

In questo caso l'incognita é il tempo, quindi (2.1.3) va invertita nel modo seguente (ricordando la proprietà logaritmica $\ln((1+i)^t) = t \cdot \ln(1+i)$*):*

$$(1+i)^t = \frac{M}{C} \implies \ln((1+i)^t) = \ln\left(\frac{M}{C}\right) \implies t = \frac{\ln\left(\frac{M}{C}\right)}{\ln(1+i)}.$$

Sostituendo i dati dell'esercizio, avremo:

$$t = \frac{\ln(1,4)}{\ln(1,0132)} = \frac{0,336472}{0,013113} = 25,65818 \text{ anni.}$$

Trasformando ulteriormente in mesi e giorni, troveremo che il tempo richiesto risulta 25 anni, 7 mesi e 27 giorni.

La capitalizzazione di un determinato importo é un evento che può verificarsi nelle situazioni della vita reale anche al di fuori degli investimenti bancari o finanziari. In generale, la forma di capitalizzazione non viene specificata, ma la logica e la pratica vorrebbero che fosse utilizzato il regime a interessi composti. i tassi utilizzati sono invece normalmente ricavati dagli aggiornamenti ISTAT o dall'andamento dei tassi di inflazione. Un esempio classico sta nella produzione di interessi di una somma data in cauzione. Quando si stipula un contratto di affitto, spesso viene richiesta al locatario (affittuario) un deposito cauzionale (la cosiddetta *caparra*), che viene poi restituita dal locatore (proprietario), con gli interessi maturati nel corso degli anni. In realtà gli interessi andrebbero corrisposti a fine di ogni anno, ma é pratica corrente che vengano restituiti alla fine insieme alla caparra.

Esercizio 34. ***Per un contratto di affitto di 4 anni viene richiesto un deposito cautelativo di 1.300 euro, pari a due mensilità. Supponendo di applicare nei 4 anni i tassi di interesse dello*** $0,9\%$***,*** $0,8\%$***,*** $0,75\%$ ***e*** $0,5\%$ ***nel regime a interessi composti, a quanto ammonta il rimborso del deposito cautelativo alla fine del quarto anno?***

Va notato che la soluzione sarà differente a seconda del tipo di rimborso. Se gli interessi verranno corrisposti al locatario alla fine di ciascun anno, essi non produrranno alcun interesse negli anni successivi, quindi si avrà:

- $M_1 = 1.300(1,009) = 1.311,7$ *euro alla fine del primo anno, con interessi* $I_1 = 11,7$ *euro;*
- $M_2 = 1.300(1,008) = 1.310,4$ *euro alla fine del secondo anno, con interessi* $I_2 = 10,4$ *euro;*
- $M_3 = 1.300(1,0075) = 1.309,75$ *euro alla fine del terzo anno, con interessi* $I_3 = 9,75$ *euro;*
- $M_4 = 1.300(1,005) = 1.306,5$ *euro alla fine del quarto anno, con interessi* $I_4 = 6,5$ *euro.*

In questo caso, se tali interessi non vengono messi a frutto, il totale degli interessi é la somma $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 38,35$ *euro.*

Se invece, gli interessi vengono tutti corrisposti alla fine con il rimborso del deposito cautelativo, bisogna considerare che tutto il montante prodotto alla fine di un anno genera interessi per l'anno successivo, di conseguenza la formula risulta:

$$M(4) = 1.300(1,009)(1,008)(1,0075)(1,005) = 1.338,77 \text{ euro.}$$

Quindi $I = M(4) - M(0) = 38,77$ *euro, e l'interesse totale in questo caso é maggiore. La differenza é molto piccola, dati i tassi bassi, tutti sotto l'*1%*. Allo stesso risultato si poteva arrivare capitalizzando gli interessi uno per uno, ossia:*

$$I = 11,7(1,008)(1,0075)(1,005) + 10,4(1,0075)(1,005)+$$

$$+9,75(1,005) + 6,5 = 38,7705 \text{ euro.}$$

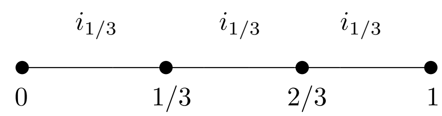
2.2 Tassi d'interesse

Nella pratica corrente, si fa spesso riferimento a tassi d'interesse relativi a periodi diversi dal singolo anno. Data la proprietà di scindibilità della legge esponenziale, risulta particolarmente intuitiva la nozione di tasso periodale equivalente ad un determinato tasso annuo d'interesse. Il tasso d'interesse relativo ad $1/m$ di anno equivalente al tasso unitario annuo i si indica con $i_{1/m}$, ed é legato ad i dalla relazione:

$$(1 + i_{1/m})^m = 1 + i. \tag{2.2.1}$$

Invece, in regime di capitalizzazione ad interessi semplici, la relazione analoga risulta essere:

$$1 + mi_{1/m} = 1 + i \iff i_{1/m} = \frac{i}{m}. \tag{2.2.2}$$



Nel caso $m = 3$, l'anno é diviso in 3 quadrimestri e $i_{1/3}$ é il tasso quadrimestrale.

In pratica, in regime di interesse composto, il montante di un capitale C impiegato per un anno al tasso i é uguale a quello dello stesso capitale impiegato per m emmesimi di anno al tasso $i_{1/m}$.

La scindibilità del regime di capitalizzazione composta comporta che una operazione intermedia di capitalizzazione degli interessi maturati non ha conseguenze sul montante finale, perchè corrisponde ad una fattorizzazione della legge di formazione del montante. Essendo infatti la legge di capitalizzazione della forma: $M(t) = Cr(t) = C(1+i)^t$, $\forall s \in (0,t)$, si ha:

$$r(t) = r(s) \cdot r(t-s) = (1+i)^s \cdot (1+i)^{t-s}.$$

Esercizio 35. ***Determinare il tasso trimestrale equivalente al tasso annuo di interesse dell'*** $1,8\%$***.***

Se cerchiamo un tasso trimestrale, stiamo dividendo l'anno in 4 trimestri, e quindi chiameremo $i_{1/4}$ *tale tasso. Applicando e poi invertendo la relazione (2.2.1) con* $i = 18/1.000$*, otterremo:*

$$(1+i_{1/4})^4 = 1+i \iff i_{1/4} = \left(1 + \frac{18}{1.000}\right)^{1/4} - 1 = 0,004469 = 0,44\%.$$

Esercizio 36. ***Determinare il tasso annuo di interesse*** i ***di un investimento sapendo che il tasso mensile corrispondente é*** $0,31\%$***.***

Semplicemente, sapendo che $i_{1/12} = 0,0031$*, applichiamo la relazione (2.2.1):*

$$i = (1,0031)^{12} - 1 = 1,03784 - 1 = 3,78\%.$$

2.2.1 Tasso nominale d'interesse

Nel caso in cui un capitale C sia investito in regime di interesse composto al tasso annuo i, ma l'interesse prodotto venga messo a disposizione dell'investitore ad intervalli regolari, m volte all'anno, possiamo scrivere la funzione montante come $M(t) = C(1+i_{1/m})^{mt}$, definendo in questo modo un altro tasso d'interesse.

In questo caso, l'interesse maturato ad ogni m-esimo di anno é $M(1/m)-C = Ci_{1/m}$; se ad ogni frazione di anno l'investimento riparte, il capitale messo a frutto torna ad essere C come all'inizio dell'investimento; di conseguenza, il montante prodotto in 1 anno di investimento é

$$C + mCi_{1/m} = C(1 + mi_{1/m}).$$

Definizione 37. *La quantità*

$$j(m) := m \cdot i_{1/m}$$

é detta ***tasso nominale annuo d'interesse, convertibile*** m ***volte nell'anno****.*

Dalla relazione sui tassi, ne segue immediatamente un'altra che lega il tasso annuo d'interesse a quello nominale:

$$i = \left(1 + \frac{j(m)}{m}\right)^m - 1.$$

Si può dimostrare che se gli interessi staccati ad ogni m-esimo di anno vengono via via investiti al tasso i equivalente a $j(m)$, gli interessi totali maturati risultano uguali. Infatti, $I(1) = Ci$; d'altra parte, frazionando l'investimento come descritto in precedenza l'interesse sarà:

$$Ci_{1/m} \sum_{k=1}^{m} (1+i)^{1-(k/m)} = Ci_{1/m}(1+i) \sum_{k=1}^{m} ((1+i)^{-1/m})^k =$$

$$= Ci_{1/m}(1+i)^{1-(1/m)} \frac{1-(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1/m}} = Ci_{1/m} \frac{i}{(1+i)^{1/m}-1} = Ci,$$

avendo sfruttato la somma delle serie geometrica, valida per ogni ragione $q \in (0, 1)$ (sulle serie geometriche e le relative formule e proprietà, consultare il Capitolo sulle Rendite):

$$\sum_{k=1}^{n} q^k = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Poichè $j(1) = i$, e $j(m) = m[(1+i)^{1/m} - 1]$, si vede facilmente che $j(m+1) < j(m)$ $\forall m \geq 1$, j é una funzione convessa e decrescente di m, avente asintoto orizzontale destro dato da:

$$y = \lim_{m \longrightarrow +\infty} j(m) = \ln(1+i) = \delta,$$

ossia il **tasso istantaneo di interesse**, o forza d'interesse, come lo definiremo tra breve.

Esercizio 38. ***Determinare il tasso nominale annuo di interesse convertibile 3 volte all'anno associato al tasso annuo di interesse del*** $3,7\%$***.***

Prima di tutto, calcoliamo il tasso quadrimestrale $i_{1/3}$*, perchè il tasso nominale che stiamo cercando si riferisce ad un investimento che riparte 3 volte in un anno, cioè ad ogni quadrimestre. La relazione (2.2.1), con* $i = 37/1.000$*, implica:*

$$(1+i_{1/3})^3 = 1+i \iff i_{1/3} = \left(1+\frac{37}{1.000}\right)^{1/3} - 1 = 0,012184 = 1,21\%.$$

Di conseguenza, il tasso nominale cercato $j(3)$ *é dato dalla formula seguente:*

$$j(3) = 3 \cdot i_{1/3} = 0,036552 = 3,65\%.$$

2.3 Nozioni complementari sulla capitalizzazione

2.3.1 Le leggi di capitalizzazione come soluzioni di equazioni differenziali del I ordine

I tre regimi finanziari che abbiamo introdotto possono anche essere visti come soluzioni di problemi di Cauchy del I ordine, di cui ricordiamo sinteticamente la formulazione standard (per semplificare la trattazione, ci riferiremo solo a problemi di Cauchy in cui la soluzione esiste ed é unica).

Definizione 39. *Si chiama* ***problema di Cauchy del I ordine*** *un'equazione differenziale del I ordine, vale a dire in cui compare solo la derivata prima della funzione incognita, corredata da una condizione iniziale. Detta* $M(t)$ *tale funzione incognita e* (t_0, M_0) *un punto contenuto nel grafico della soluzione, scriviamo il problema nella forma seguente:*

$$\begin{cases} M'(t) = f(M,t) \\ M(t_0) = M_0 \end{cases}.$$

Per ricavare le leggi di capitalizzazione da opportuni problemi di Cauchy, abbiamo bisogno di schematizzarne il metodo risolutivo nel cosiddetto caso **a variabili separabili**, vale a dire quando la funzione $f(\cdot)$ a secondo membro nell'equazione differenziale é un prodotto di una funzione dipendente solo da M e una dipendente solo da t: $f(M,t) = a(M) \cdot b(t)$ (per una disamina più esaustiva dell'argomento, cfr. [R], pagg. 40-45, o un qualsiasi libro di Analisi Matematica che tratta le equazioni differenziali fondamentali).

Ricaviamo la soluzione quando il problema é a variabili separabili, scrivendo la derivata prima $M'(t)$ come rapporto di differenziali, e poi tramite minimo comune multiplo collocando tutto ciò che dipende da M nel lato sinistro e tutto ciò che dipende da t nel lato destro:

$$M'(t) = a(M)b(t) \implies \frac{dM}{dt} = a(M)b(t) \implies \frac{dM}{a(M)} = b(t)dt,$$

e a questo punto, sotto opportune ipotesi di integrabilità di entrambi i membri, svolgendo entrambi gli integrali:

$$\int_{M(t_0)}^{M(t)} \frac{dM}{a(M)} = \int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau.$$

Attenzione a questo punto: non bisogna fare confusione tra la variabile di integrazione e l'estremo di integrazione nel membro destro. Infatti l'integrale nel membro sinistro ha come estremi il valore della funzione montante all'istante iniziale t_0 e il suo valore al tempo corrente t, mentre dall'altra parte si va dal tempo iniziale t_0 al tempo corrente t. Quindi in entrambi gli integrali le variabili di integrazione, che si vedono dai differenziali, sono variabili *accessorie*, che una volta svolta l'integrazione spariscono. Per similitudine con le variabili relative, prendiamo da una parte M e dall'altra la lettera greca τ (si legge tau).

Detta ora $A(M)$ la primitiva del rapporto $\dfrac{1}{a(M)}$, se $A(M)$ é almeno localmente invertibile, otterremo la soluzione:

$$M(t) = A^{-1}\left(A(M_0) + \int_{t_0}^{t} b(\tau)d\tau\right). \tag{2.3.1}$$

Nell'esempio seguente vedremo 3 diversi casi di applicazione di questo metodo risolutivo, usando sempre $t_0 = 0$ come istante iniziale della capitalizzazione. Va notato come la derivata prima del montante può essere facilmente interpretata come velocità di crescita nel tempo, e quindi velocità di capitalizzazione (un pò come nella Meccanica Classica, in cui la velocità é la derivata prima dello spostamento, o nei modelli di crescita logistica delle popolazioni).

Esempio 40. 1. ***(Interesse semplice)*** *Consideriamo, con la notazione ormai consueta, il seguente problema di Cauchy:*

$$\begin{cases} M'(t) = Ci \\ M(0) = C \end{cases}.$$

In questo caso, la velocità di accumulazione del montante coincide con l'interesse annuo ($Ci = I$). La funzione a secondo membro é costante, e dunque si può integrare in modo elementare:

$$dM = Cidt \implies M(t)-M(0) = Ci(t-0) \implies M(t) = C+Cit = C(1+it).$$

2. ***(Sconto commerciale)*** *In questo caso, il problema di Cauchy di partenza é meno intuitivo:*

$$\begin{cases} M'(t) = \dfrac{sM^2(t)}{C} \\ M(0) = C \end{cases},$$

da cui la soluzione:

$$\frac{dM}{M^2} = \frac{s}{C}dt \implies \int_C^{M(t)} \frac{dM}{M^2} = \int_0^t \frac{s}{C}d\tau \implies$$

$$\implies -\frac{1}{M(t)} + \frac{1}{C} = \frac{s}{C}t \implies \frac{1}{M(t)} = \frac{1-st}{C} \implies M(t) = \frac{C}{1-st},$$

che é ben definita, continua e positiva in $\left[0, \dfrac{1}{s}\right)$*, come già sappiamo.*

3. ***(Interesse composto)*** *Usiamo inizialmente la sostituzione* $\delta = \ln(1+i)$ *e consideriamo il problema seguente:*

$$\begin{cases} M'(t) = \delta M(t) \\ M(0) = C \end{cases},$$

la cui soluzione scaturisce dalla solita procedura:

$$\frac{dM}{M} = \delta dt \implies \ln\left(\frac{M(t)}{M(0)}\right) = \delta t \implies M(t) = Ce^{\delta t},$$

dove, risostituendo otteniamo il montante nel regime a interessi composti: $M(t) = C(1+i)^t$.

Definizione 41. $\delta := \ln(1+i)$ *é detta* ***forza d'interesse (o intensità istantanea di interesse)****.*

In realtà, si può considerare l'intensità istantanea di interesse in un'accezione più ampia, come funzione del tempo e come derivata logaritmica del fattore montante:

$$\delta(t) := \frac{d}{dt}(\ln(r(t))) = \frac{r'(t)}{r(t)}.$$

Essendo un rapporto tra funzioni positive, anche $\delta(t)$ deve essere positiva a sua volta: in definitiva, l'interesse prodotto da un capitale unitario durante un intervallo infinitesimo é $\delta(t)dt$. Va notato che $\delta(t)$ può essere considerata equivalentemente come rapporto tra $r'(t)$ ed $r(t)$ oppure tra $M'(t)$ ed $M(t)$. Infatti:

$$\delta(t) = \frac{r'(t)}{r(t)} = \frac{Cr'(t)}{Cr(t)} = \frac{M'(t)}{M(t)}.$$

Esercizio 42. ***Trovare la legge di capitalizzazione che risolve il seguente problema di Cauchy del I ordine:***

$$\begin{cases} M'(t) = tM(t) \\ M(0) = C \end{cases} .$$

In questo caso, la separazione di variabili risulta:

$$\frac{dM}{M} = tdt \implies \ln\left(\frac{M(t)}{M(0)}\right) = \left[\frac{\tau^2}{2}\right]_0^t \implies \frac{M(t)}{C} = e^{\frac{t^2}{2}} \implies M(t) = Ce^{t^2/2}.$$

Possiamo anche concludere l'esercizio con una breve verifica della soluzione: sostituendo 0 a t, troviamo che $M(0) = Ce^0 = C$, *mentre affinchè la soluzione rispetti l'equazione del problema, notiamo che il membro destro risulta* $M'(t) = C \cdot \frac{2t}{2} e^{t^2/2} = Cte^{t^2/2}$, *e anche il membro destro vale* $tM(t) = t \cdot Ce^{t^2/2} = Cte^{t^2/2}$.

Esercizio 43. ***Trovare la legge di capitalizzazione che risolve il seguente problema di Cauchy del I ordine:***

$$\begin{cases} M'(t) = \dfrac{M(t)}{t^2+1} \\ M(0) = C \end{cases} .$$

Usando il metodo della separazione delle variabili, otteniamo:

$$\frac{dM}{M} = \frac{dt}{1+t^2} \implies \ln\left(\frac{M(t)}{M(0)}\right) = \int_0^t \frac{1}{\tau^2+1} d\tau = [\arctan \tau]_0^t \implies$$

$$\implies M(t) = Ce^{\arctan t},$$

ricordando che l'arcotangente in 0 *vale* 0 *(l'arcotangente di* x *é l'angolo la cui tangente, ossia il rapporto tra il suo seno e il suo coseno, vale* x*).*

Esercizio 44. ***Data la legge di capitalizzazione*** $r(t) = t^2 + \ln(t+1)$***, determinare l'intensità istantanea di interesse associata e calcolare il montante ottenuto dall'investimento di 500 euro dopo 4 anni.***

L'intensità istantanea di interesse $\delta(t)$ *é data da:*

$$\delta(t) = \frac{M'(t)}{M(t)} = \frac{Cr'(t)}{Cr(t)} = \frac{2t + \frac{1}{t+1}}{t^2 + \ln(t+1)} = \frac{2t^2+2t+1}{(t+1)[t^2+\ln(t+1)]}.$$

Invece, il montante dopo 4 anni dell'investimento suddetto risulta:

$$M(4) = 500 \cdot (4^2 + \ln(4+1)) = 8.804,718956 \ euro \ .$$

2.3.2 Capitalizzazione mista e confronto tra montanti

Tutte le leggi finanziarie che abbiamo incontrato vengono adottate nella normale pratica bancaria. In generale, per investimenti con durate maggiori di un anno, viene applicato un regime finanziario di *capitalizzazione mista*, una sorta di combinazione tra regime semplice e regime composto. Per la precisione, si usa il regime composto per il numero intero di anni e quello semplice per la parte restante, quindi la formula risulta:

$$M(t;C) = C(1+i)^{[t]}(1+i(t-[t])),$$

con $[t] := \max\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq t\}$.

Esercizio 45. ***Determinare il montante maturato dopo 4 anni, 8 mesi e 6 giorni dal capitale iniziale*** $C = 1.500$ ***euro al tasso d'interesse annuo dell'***$1,9\%$ ***in regime di capitalizzazione mista.***

Usando la formula della capitalizzazione mista, $[t] = 4$*, mentre, riportando al solito tutto agli anni,* $t - [t] = 0,683333$*, e di conseguenza otterremo:*

$$M = 1.500 \cdot (1,019)^4 \cdot [1 + (0,683333) \cdot (0,019)] =$$

$$= 1.500 \cdot 1,078193 \cdot 1,012983 = 1.638,28817 \textit{ euro.}$$

Per quanto riguarda le usuali pratiche bancarie, va messo in evidenza che le banche non possono prestare denaro alle stesse condizioni con le quali risarcisce i suoi creditori. Il tasso creditorio usato per le operazioni attive sarà differente da quello debitorio; riferendo entrambi gli aggettivi alla banca, in generale il tasso debitorio sarà inferiore a quello creditorio. E tutto questo naturalmente prescindendo dalle spese di bollo, da quelle per l'invio dell'estratto conto a casa del cliente, dalle spese per il Bancomat o per l'home banking...

Per concludere questo Capitolo, mettiamo a confronto i due regimi a interessi semplici e composti per valutarne il livello di montante. Abbiamo già visto come tutti i fattori montanti siano crescenti; a parità di tasso annuo di interesse e di capitale iniziale, e inoltre sapendo che i montanti $C(1+it)$ e $C(1+i)^t$ raggiungono lo stesso livello a 1 anno, le due curve hanno due punti in comune. Avendo entrambe le derivate positive, se il fattore montante esponenziale risulta convesso, si trova sotto la funzione lineare nell'intervallo compreso tra le ascisse dei due punti di intersezione, cioè per $t \in (0,1)$ e sopra in ogni istante successivo, cioè per $t \in (1,+\infty)$.

A tale proposito, essendo la derivata seconda del fattore montante esponenziale positiva, in quanto $M''(t) = C(\ln(1+i))^2(1+i)^t$, allora $C(1+i)^t$ é convessa, quindi possiamo concludere che:

$$1 + it > (1+i)^t \quad \text{per} \quad 0 < t < 1, \qquad\qquad 1 + it < (1+i)^t \quad \text{per} \quad t > 1.$$

Esercizio 46. ***Un soggetto decide di investire un capitale di 2.500 euro nel regime ad interessi composti per 4 anni e 3 mesi ad un tasso semestrale del*** **2%*****. Determinare in quanti anni otterrebbe lo stesso montante se investisse lo stesso capitale al tasso annuo equivalente in regime ad interessi semplici.***

Se il tasso semestrale é $i_{1/2} = 2/100$, *calcoliamo prima di tutto il tasso annuo equivalente* i *con la relazione (2.2.1):*

$$i = \left(1 + \frac{2}{100}\right)^2 - 1 = 4,04\%.$$

Applichiamo poi la formula di capitalizzazione composta per ottenere il montante a 4 anni e 3 mesi (ossia 4,25 anni):

$$M(4,25) = 2.500 \cdot (1 + 0,404)^{4,25} = 2.958,294926 \text{ euro.}$$

Infine, uguagliamo il montante ottenuto al montante che risulterebbe dall'investimento in regime di capitalizzazione lineare con lo stesso capitale di partenza e ricaviamo il tempo t^**:*

$$2.500(1 + 0,0404t^*) = 2.958,294926 \iff t^* = \left(\frac{2.958,294926}{2.500} - 1\right)\frac{1}{0,0404} =$$

$= 4,537573$ *anni, vale a dire 4 anni, 6 mesi e 13 giorni.*

Capitolo 3

Rendite

3.1 Valore di un'operazione finanziaria in regime composto

Con le notazioni del paragrafo precedente, consideriamo un regime finanziario a interessi composti, quindi con funzione di capitalizzazione esponenziale, la sua relativa inversa come legge di attualizzazione, e la forza d'interesse costante δ. D'ora in avanti, se non specificato diversamente, sarà sempre questa la forma funzionale di capitalizzazione usata.

Uno dei concetti fondamentali della Matematica Finanziaria, che ora introdurremo, riguarda la valutazione di una qualsiasi operazione finanziaria $\underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{t}}$, ossia il calcolo del suo valore, ad una qualsiasi data, precedente, intermedia o successiva allo scadenzario dell'operazione.

Definizione 47. *Si chiama **valore dell'operazione finanziaria $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$** al tempo t la quantità:*

$$W(t,\ \underline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{m} x_k e^{\delta(t-t_k)} = \sum_{t_k \le t} x_k e^{\delta(t-t_k)} + \sum_{t_k > t} x_k e^{-\delta(t_k-t)} = M(t,\ \underline{\boldsymbol{x}}) + A(t,\ \underline{\boldsymbol{x}}), \tag{3.1.1}$$

dove i due addendi rappresentano rispettivamente il montante generato dagli importi esigibili (o pagabili) alle scadenze anteriori a t ($M(t,\ \underline{\boldsymbol{x}})$) e il valore attuale delle somme esigibili (o pagabili) in date successive a t ($A(t,\ \underline{\boldsymbol{x}})$).

Una scrittura alternativa di (3.1.1), usando il tasso annuo i in luogo della forza d'interesse δ, é:

$$W(t,\ \underline{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^{m} x_k(1+i)^{t-t_k} = \sum_{t_k \le t} x_k(1+i)^{t-t_k} + \sum_{t_k > t} x_k(1+i)^{-(t_k-t)} = M(t,\ \underline{\mathbf{x}}) + A(t,\ \underline{\mathbf{x}}). \tag{3.1.2}$$

Definizione 48. *Un'operazione finanziaria $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ si dice **equa** al tempo t se $W(t,\ \underline{\boldsymbol{x}}) = 0$.*

Quindi l'equità caratterizza un'operazione di scambio in cui, ad un dato istante, il valore delle somme incassate si possa valutare uguale al valore delle somme pagate.

Quando poi la valutazione di (3.1.1) viene attuata al primo o all'ultimo istante dello scadenzario, abbiamo solo uno dei due addendi, cioè nel primo caso avremo soltanto il valore attuale e nel secondo solo il montante, quindi possiamo dare le relative ulteriori definizioni:

Definizione 49. *Si chiama **valore attuale dell'operazione finanziaria** $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ la quantità:*

$$W(t_1,\ \underline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{m} x_k e^{\delta(t_1-t_k)} = \sum_{k=1}^{m} x_k(1+i)^{t_1-t_k} = A(t_1,\ \underline{\boldsymbol{x}}). \tag{3.1.3}$$

Definizione 50. *Si chiama **montante dell'operazione finanziaria** $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$ la quantità:*

$$W(t_m,\ \underline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{m} x_k e^{\delta(t_m-t_k)} = \sum_{k=1}^{m} x_k(1+i)^{t_m-t_k} = M(t_m,\ \underline{\boldsymbol{x}}). \tag{3.1.4}$$

Esercizio 51. ***Data l'operazione finanziaria $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{10, 20, -30\}/\{1, 2, 3\}$, calcolarne il valore dopo 1 anno e mezzo al tasso annuo di valutazione dell'1%.***

Ricordando che lo scadenzario é espresso in anni, applichiamo la formula (3.1.1) al tempo $t = 1,5$, quindi capitalizzando il primo importo ed attualizzando gli altri 2:

$$W(1,5, \underline{\boldsymbol{x}}) = 10 \cdot (1+0,01)^{1,5-1} + 20 \cdot (1+0,01)^{1,5-2} + (-30) \cdot (1+0,01)^{1,5-3} =$$

$$= 10,049875 + 19,900743 - 29,555560 = 0,395058 \ \textit{euro}.$$

Esercizio 52. ***Data l'operazione finanziaria seguente:***

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{100, -120, -150, x_4\}/\{1, 2, 3, 4\},$$

determinare l'ultimo importo x_4 ***in modo che tale operazione sia equa all'istante iniziale*** $t_1 = 1$ ***se valutata ad un tasso annuo di interesse del*** $2,5\%$***.***

Calcoliamo il valore dell'operazione con il tasso richiesto lasciando come incognita l'importo da determinare x_4*:*

$$W(1, \underline{\boldsymbol{x}}) = 100 \cdot (1+0,025)^{1-1} + (-120) \cdot (1+0,025)^{1-2} + (-150) \cdot (1+0,025)^{1-3} +$$

$$+x_4 \cdot (1+0,025)^{1-4} = 100 - 117,073170 - 142,772159 + 0,928599x_4,$$

e successivamente imponiamo l'ipotesi di equità:

$$W(1, \underline{\boldsymbol{x}}) = 0 \iff -159,845329 + 0,928599x_4 = 0 \iff x_4 = 172,136012 \text{ euro.}$$

Quindi $x_4 = 172,136012$ *euro risulta l'ultimo importo che l'operazione finanziaria deve avere affinchè sia equa all'istante iniziale rispetto al tasso di valutazione del* $2,5\%$*.*

3.2 Generalità sulle rendite

L'operazione finanziaria, di fondamentale importanza, su cui ci focalizzeremo,é la cosiddetta rendita, intesa come insieme di importi, ognuno corrispondente ad una data. Per l'esattezza:

Definizione 53. *Si chiama* **rendita** *una successione di capitali da riscuotere (o da pagare) a scadenze determinate.*

I singoli capitali della rendita si dicono **rate**. Le rendite certe sono quelle a priori fissate nel numero, nell'ammontare e nelle epoche di pagamento. Una rendita é detta **periodica** quando le rate sono equiintervallate tra loro, **costante** se le rate sono tutte dello stesso ammontare, **perpetua** se il numero delle rateé infinito. Una distinzione importante da fare é quella tra rendite cosiddette **anticipate**, quelle in cui il pagamento delle rate avviene all'inizio di ogni periodo, e quelle **posticipate**, nelle quali invece avviene alla fine.

Per riferirci alle consuetudini della vita quotidiana, in generale il pagamento dello stipendio per i dipendenti é effettuato in rate posticipate, mentre per gli inquilini il versamento dell'affitto ai proprietari di case é in rate anticipate.

Si parla infine di rendita **unitaria** quando tutte le rate, costanti, sono pari ad un'unità di capitale.

Uno dei problemi connessi con lo studio delle rendite é la loro valutazione, cioè la determinazione di una somma che si può considerare finanziariamente equivalente alla rendita in un dato istante di tempo. Come nel caso precedentemente visto delle operazioni finanziarie in generale, questa somma si dirà **valore** (o **valore capitale**) della rendita. Nella teoria delle rendite, l'utilizzo del regime finanziario ad interessi composti é standard. Chiameremo t_0 e t_n gli istanti rispettivamente iniziale e finale di decorrenza della rendita.

Definizione 54. *Il **montante** di una rendita é il suo valore capitale riferito al tempo finale* t_n.

Se si pensa alla rendita come ad una successione di somme in entrata, é il capitale che si ottiene se tutte le rate, appena riscosse e fino all'istante finale, vengono investite al tasso impiegato per la valutazione.

Definizione 55. *Il valore capitale riferito al tempo* t_0 *o ad un altro istante* t *antecedente a* t_0 *si chiama **valore attuale della rendita**.*

Il valore attuale rappresenta la somma che, impiegata a partire dall'istante di riferimento ed in base alla legge usata per la valutazione stessa, risulta esattamente sufficiente a produrre tutte le rate della rendita alle scadenze previste.

Se il tempo di riferimento della valutazione t precede quello di decorrenza della rendita, si parla di rendita **differita** della durata $t_0 - t$. Se invece l'istante t scelto per la valutazione coincide con l'istante iniziale t_0, la rendita é **immediata**. Quindi la rendita é immediata oppure differita non a causa di caratteristiche intrinseche sue, ma in base all'istante scelto per effettuare la sua valutazione. Una rendita posticipata immediata può essere considerata equivalente ad una rendita anticipata differita del primo periodo.

3.2.1 Formule fondamentali delle serie geometriche

Richiamiamo brevemente le principali formule relative alla serie geometrica, di fondamentale importanza nel calcolo dei valori attuali delle rendite e di tutte le ulteriori formule correlate. Per una trattazione esaustiva delle successioni e delle serie geometriche si può consultare ad esempio il Capitolo 1 di [R].

Proposizione 56. *La serie geometrica di ragione* v*:*

$$\sum_{j=1}^{n} v^j = v + v^2 + \ldots + v^n$$

converge per ogni v *tale che* $|v| < 1$*, e la somma della serie é* $v \cdot \dfrac{1-v^n}{1-v}$.

Dimostrazione. Proviamo per induzione su n. Per $n = 1$ si ha banalmente:

$$\sum_{j=1}^{1} v^j = v = v\frac{1-v^1}{1-v} = v,$$

verificata per ogni v.

Il secondo passo della prova per induzione richiede che si prenda la tesi del teorema come ipotesi per n, e si provi la stessa relazione per $n+1$. Bisogna dunque provare l'identità:

$$\sum_{j=1}^{n+1} v^j = v \cdot \frac{1-v^{n+1}}{1-v}.$$

Prima di tutto, scriviamo la somma a primo membro, che risulta:

$$\sum_{j=1}^{n+1} v^j = \sum_{j=1}^{n} v^j + v^{n+1},$$

che per l'ipotesi induttiva é uguale a:

$$v\frac{1-v^n}{1-v} + v^{n+1} = v\left(\frac{1-v^n}{1-v} + v^n\right) = v\left(\frac{1-v^n+v^n-v^{n+1}}{1-v}\right),$$

da cui segue evidentemente la tesi. □

Passando al limite per infiniti termini della serie, otteniamo 2 ulteriori formule utili:

$$\sum_{j=1}^{\infty} v^j = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{n} = \frac{v}{1-v}.$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} v^j = v^0 + \sum_{j=1}^{\infty} v^j = 1 + \frac{v}{1-v} = \frac{1}{1-v}.$$

Vediamo un paio di esempi in cui dobbiamo usare la somma della serie geometrica. Le formule matematiche possono saltare fuori nella vita anche in situazioni impensabili, dobbiamo tenerlo presente!

Esercizio 57. ***Roberto il pizzaiolo sforna una pizza ai funghi lunga 2 metri. Entra un cliente e ne compra la metà, poi entra un altro cliente e compra la metà della pizza rimasta. Supponendo che altri 4 clienti facciano la stessa cosa (vedono la pizza e ne prendono metà), quanti centimetri di pizza saranno rimasti alla fine?***

Consideriamo il totale della pizza di 200 centimetri. La percentuale di pizza residua sarà (applicando la formula della somma della serie geometrica):

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=$$

$$=1-\sum_{j=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^j=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^6}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{64}.$$

Quindi i centimetri rimasti saranno $200\cdot\dfrac{1}{64}=3,125$.

Esercizio 58. ***Supponiamo di avere in banca un capitale di*** **30.000** ***euro, e dividiamolo inizialmente in 3 parti uguali. Di queste 3 parti, una la ritiriamo, una la lasciamo sul conto e la terza la suddividiamo ulteriormente in 3 parti uguali. Di nuovo, una la ritiriamo, una la lasciamo sul conto e una la suddividiamo in 3 parti. Se il procedimento viene ripetuto in totale 10 volte, quanto avremo ritirato dopo la decima iterazione? Supponendo di iterare la procedura all'infinito, quanto avremo ritirato?***

Scrivendo la quantità di denaro ritirato come una somma di termini, avremo:

$$30.000\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\cdots\right),$$

che corrisponde alla serie

$$30.000\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^j=30.000\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}}=14.999,745973\ \textit{euro}.$$

Se invece il procedimento fosse ripetuto infinite volte, avremmo:

$$30.000\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^j=30.000\cdot\frac{\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=15.000\ \textit{euro}.$$

Le formule che abbiamo descritto hanno soprattutto una grande importanza nella valutazione delle rendite a rata costante, come vedremo tra poco.

3.2.2 Valore attuale e montante di una rendita

In questo paragrafo, consideriamo i il tasso annuo d'interesse e $v = (1+i)^{-1}$ il fattore annuo di sconto, e supponiamo che il valore di ciascuna rata sia unitario, vale a dire $R = 1$. Il valore attuale di una rendita rappresenta il capitale che, investito al tasso d'interesse i per la durata di n anni a partire dall'istante di riferimento, genera esattamente tutte le rate della rendita. Da ora in poi useremo anche la notazione standard di questa teoria.

Proposizione 59. *Il* ***valore attuale di una rendita annua unitaria immediata posticipata di durata*** n ***anni*** *risulta:*

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}. \tag{3.2.1}$$

Dimostrazione. Essendo $R = 1$, la determinazione del valore attuale si riduce al calcolo della serie geometrica la cui ragione é il fattore di sconto v:

$$v + v^2 + v^3 + \ldots + v^n = \sum_{j=1}^{n} v^j = v \cdot \frac{1-v^n}{1-v} =$$

$$= \frac{1}{1+i} \frac{\dfrac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{\dfrac{i}{1+i}} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

scritto in termini di tasso annuo di interesse. □

La formula (3.2.1), di notevole importanza e da ricordare rigorosamente, introduce un nuovo simbolo: $a_{\overline{n}|i}$ (che si legge a **figurato** n **al tasso** i) é una funzione crescente in n e decrescente in i. Da questa formula, ne seguiranno alcune altre, per indicare i valori attuali di rendite con caratteristiche differenti.

Nel caso di differimento di t anni, ossia del caso in cui ogni rata va scontata per ulteriori t anni, avremo che il **valore attuale di una rendita annua unitaria posticipata e differita di** t **anni** sarà:

$$_{t|}a_{\overline{n}|i} = v^{t+1} + v^{t+2} + \ldots + v^{t+n} = v^t \sum_{j=1}^{n} v^j = v^{t+1} \cdot \frac{1-v^n}{1-v} = v^t a_{\overline{n}|i}.$$

Tale relazione vale per ogni t positivo ma non necessariamente intero.

Pensiamo ora ad una situazione in cui la rendita sia anticipata, ogni rata va scontata un anno in meno rispetto alla rendita posticipata; di conseguenza, il

valore attuale di una rendita annua unitaria anticipata immediata di durata n anni sarà:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{j=0}^{n-1} v^j = 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \frac{1-v^n}{1-v}.$$

Si può facilmente verificare la relazione tra i valori attuali:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i}.$$

Per quanto riguarda invece il calcolo del montante, le rate vanno ora non più anticipate, ma capitalizzate, la prima per $n-1$ anni, la seconda per $n-2$ anni, la penultima per un solo anno e l'ultima viene pagata nello stesso istante scelto per il calcolo del valore capitale. Quindi il **montante di una rendita annua unitaria posticipata immediata di durata n anni** sarà dato da:

$$s_{\overline{n}|i} = \sum_{j=1}^{n} (1+i)^{n-j} = (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) + 1 = \frac{1-(1+i)^n}{1-(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Da questa formula segue la facile relazione:

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n a_{\overline{n}|i}.$$

Invece, il **valore attuale di una rendita annua unitaria anticipata immediata di durata n anni e differita di t anni** ha la forma:

$$_{t|}\ddot{a}_{\overline{n}|i} = v^t + v^{t+1} + \ldots + v^{t+n-1} = v^{t-1} \sum_{j=1}^{n} v^j = v^t \frac{1-v^n}{1-v} = v^t \ddot{a}_{\overline{n}|i}.$$

L'ultima formula che esponiamo é quella del **montante di una rendita annua unitaria immediata anticipata di durata n anni**:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \ldots + (1+i) =$$

$$= (1+i)^n \sum_{j=0}^{n-1} ((1+i)^{-1})^j = (1+i)^n \frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} = (1+i)^n \ddot{a}_{\overline{n}|i}.$$

Consideriamo ora alcuni esercizi svolti in cui utilizziamo le formule enunciate.

Esercizio 60. ***Calcolare il valore attuale ed il montante di una rendita immediata posticipata annua di rata 1.200 euro e durata 15 anni, nel regime dell'interesse composto e secondo il tasso di valutazione del 12% annuo.***

Applicando la formula del valore attuale, con $n = 15$, trasformando il 12% nel tasso annuo di interesse $i = 0,12$, e successivamente moltiplicando per la rata $R = 1.200$, otteniamo:

$$Ra_{\overline{n}|i} = \frac{R}{i}(1-(1+i)^{-n}) = \frac{1.200}{0,12}(1-(1,12)^{-15}) = 8173,037387 \ \textit{euro}.$$

Per il calcolo del montante, ci basta capitalizzare a 15 anni il valore attuale trovato, ossia:

$$s_{\overline{n}|i} = (1+i)^n a_{\overline{n}|i} = (1,12)^{15} \cdot 8.173,037387 = 44.735,657592 \ \textit{euro}.$$

Esercizio 61. ***Data una rendita costante anticipata di durata 10 anni, calcolare la rata R tale che il valore attuale della rendita sia uguale a 7.500 euro se valutata a un tasso dell'$1,1\%$ annuo. Calcolarne successivamente anche il montante.***

Poichè sappiamo che

$$R\ddot{a}_{\overline{n}|i} = R(1+i)a_{\overline{n}|i},$$

impostiamo l'equazione seguente sostituendo i dati in nostro possesso:

$$7.500 = (1,011)\frac{1-(1,011)^{-10}}{0,011}R,$$

da cui ricaviamo semplicemente R:

$$R = \frac{7.500 \cdot 0,011}{1,011 \cdot (1-(1,011)^{-10})} = 787,457 \textit{euro}.$$

Il montante si può calcolare poi in due modi: o capitalizzando il valore attuale della rendita data all'inizio:

$$Rs_{\overline{n}|i} = (1,011)^{10} \cdot 7.500 = 8.367,058 \textit{euro}.$$

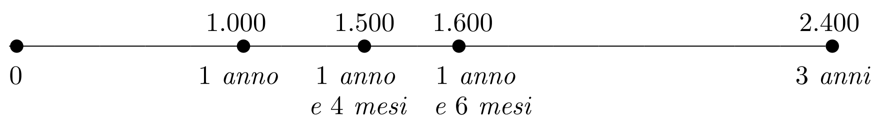
Oppure, avendo la rata, applicando la formula del montante di rendita anticipata:

$$Rs_{\overline{n}|i} = 787,457 \cdot (1,011)^{10} \cdot (1,011) \cdot \frac{1-(1,011)^{-10}}{0,011} = 8.367,054 \textit{euro}.$$

Al solito, un errore di 0,005 euro é trascurabile.

Il prossimo esercizio invece tratta una rendita non costante, in cui le formule di cui sopra non si utilizzano.

Esercizio 62. ***Data una rendita $\mathcal{R}$ di 4 rate, rispettivamente di importi 1.000 euro, 1.500 euro, 1.600 euro, 2.400 euro e di scadenze 1 anno, 1 anno e 4 mesi, 1 anno e 6 mesi, 3 anni a partire dal momento attuale, calcolarne il valore attuale e il montante al tasso di interesse del 9,5% annuo.***



Descriviamo la rendita su un segmento (questa schematizzazione é molto frequente, anche per le operazioni finanziarie in generale), ponendo in alto gli importi e in basso i tempi, per renderla immediatamente comprensibile. In questo caso, la rendita non é costante, quindi dovremo applicare la formula del valore attuale pesata con i singoli capitali C_i, $i = 1, \ldots, 4$ con i rispettivi tempi di scadenza, espressi in dodicesimi. Usiamo la scrittura $A(0, \mathcal{R})$, per il valore attuale, indicando con 0 l'istante di valutazione:

$$A(0, \mathcal{R}) = 1.000 \cdot (1 + 0,095)^{-1} + 1.500 \cdot (1 + 0,095)^{-\frac{16}{12}} +$$

$$+1.600 \cdot (1 + 0,095)^{-\frac{18}{12}} + 2.400 \cdot (1 + 0,095)^{-3} = 913,242009+$$

$$+1.329,043207 + 1.396,364515 + 1.827,969243 = 5.466,618974 \ \textit{euro.}$$

Il montante della rendita, che indichiamo con $A(3, \mathcal{R})$, si calcola capitalizzando a 3 anni il valore attuale ottenuto:

$$A(3, \mathcal{R}) = (1 + 0,095)^3 \cdot A(0, \mathcal{R}) = 7.177,301032 \ \textit{euro.}$$

3.2.3 Caso delle rendite frazionate

Consideriamo l'eventualità in cui le n annualità della rendita vengano tutte frazionate in m periodi, ad ognuno dei quali corrisponda il pagamento di $1/m$ di rata: di fatto ora i periodi sono nm. Il valore attuale relativo a questo caso si indica $a^{(m)}_{\overline{n}|i}$, e gli altri simboli corrispondenti a questo caso hanno tutti lo stesso esponente: $\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|i}$, $s^{(m)}_{\overline{n}|i}$. Bisognerà considerare il tasso d'interesse $i_{1/m}$ ed il relativo fattore di sconto $v_{1/m}$, ed otterremo l'espressione del **valore attuale di una rendita annua unitaria immediata posticipata di durata n anni e frazionata in m rate uguali posticipate**:

$$a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{m} \frac{1 - (1 + i_{1/m})^{-nm}}{i_{1/m}}.$$

O anche, ricordando le relazioni:

$$j(m) = m i_{1/m}, \quad i = \left(1 + \frac{j(m)}{m}\right)^m - 1,$$

$$a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{j(m)} = \frac{i}{j(m)} a_{\overline{n}|i}.$$

Le formule riguardanti il montante ed il valore attuale nei casi posticipato ed anticipato sono del tutto analoghe a quelle già viste nel caso non frazionato:

$$s_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^n a_{\overline{n}|i}^{(m)},$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^{1/m} a_{\overline{n}|i}^{(m)},$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1+i)^{1/m} s_{\overline{n}|i}^{(m)}.$$

Per definizione, una rendita continua é una rendita frazionata in m periodi di durata infinitesima, quindi il caso limite per m tendente all'infinito. Si può immaginare che il pagamento avvenga tramite un flusso continuo ed uniforme. Usiamo in questo caso la seguente notazione per il valore attuale:

$$\overline{a}_{\overline{n}|i} = \lim_{m \longrightarrow \infty} a_{\overline{n}|i}^{(m)} = \lim_{m \longrightarrow \infty} \left(\frac{i}{j(m)} a_{\overline{n}|i} \right) = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|i},$$

laddove $\delta = \ln(1+i)$ é l'intensità istantanea d'interesse definita in precedenza.

Esercizio 63. ***Calcolare il valore attuale ed il montante di una rendita di durata 6 anni e di rata annuale di*** 2.000 ***euro, frazionata semestralmente, valutandola a un tasso annuo dell'*** $1,5\%$***.***

In questo caso, $n = 6$ *ed* $m = 2$*, di conseguenza la formula precedente si può applicare facilmente dopo aver ricavato il tasso semestrale* $i_{1/2} = \sqrt{1,015} - 1 = 0,74\%$*. Avremo dunque:*

$$R a_{\overline{n}|i}^{(m)} = 2.000 a_{\overline{6}|0,015}^{(2)} = 2.000 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1-(1,0074)^{-12}}{0,0074} = 11.442,192337 \text{ } \textit{euro}.$$

Il montante invece risulta moltiplicando per il solito fattore:

$$R s_{\overline{n}|i}^{(m)} = (1,015)^6 \cdot 11.442,192337 = 12.511,388135 \text{ } \textit{euro}.$$

3.2.4 Caso delle rendite perpetue

Nel caso in cui il numero delle rate di una rendita sia infinito, la rendita da temporanea diventa perpetua, e di conseguenza possiamo pensarla come il caso limite per n tendente all'infinito. Ovviamente, in questo caso non é possibile considerare il montante, non esistendo un istante finale a cui riferirsi per la capitalizzazione, quindi ci si limiterà ad analizzare il valore attuale. Per definizione,

$$a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n \longrightarrow \infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}.$$

Tendendo n all'infinito, si ottengono le seguenti semplici relazioni:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = (1+i)a_{\overline{\infty}|i} = 1 + \frac{1}{i},$$

$$_{t|}a_{\overline{\infty}|i} = v^t a_{\overline{\infty}|i} = \frac{v^t}{i},$$

$$a^{(m)}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n \longrightarrow \infty} a^{(m)}_{\overline{n}|i} = \lim_{n \longrightarrow \infty} \left(\frac{i}{j(m)} a_{\overline{n}|i} \right) = \frac{1}{j(m)}.$$

In un certo senso, l'acquisto di un bene in contanti é un'operazione finanziaria semplice che si può considerare equivalente alla stipula di un contratto di affitto di durata perpetua. Per cui il prezzo d'acquisto dovrebbe rappresentare il valore attuale della rendita perpetua costituita dalle rate pagate per l'affitto.

3.3 Problemi connessi alle rendite

3.3.1 Determinazione della durata

Le grandezze fondamentali di una rendita (consideriamo ora la più classica: annua unitaria immediata posticipata e temporanea), come visto in precedenza, sono dunque l'ammontare della rata annua R, il numero di anni n, il tasso di valutazione i, e il valore attuale della rendita, A. Conoscendo tre di queste quattro grandezze, dalla formula fondamentale possiamo ricavare, a volte facilmente a volte con maggiore difficoltà, quella ignota. Poichè

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{\overline{n}|i},$$

la determinazione di A oppure di R non presenta complicazioni. Vediamo invece a quali problematiche si può andare incontro se il nostro obiettivo é la determinazione della durata n. Evidentemente,

$$\frac{iA}{R} = 1 - (1+i)^{-n} \implies (1+i)^{-n} = 1 - \frac{iA}{R} \implies n = -\frac{\ln\left(1 - \dfrac{iA}{R}\right)}{\ln(1+i)}.$$

Quest'espressione ha senso solo per $R > iA$, vale a dire solo se la rata ha importo maggiore dell'interesse prodotto. In caso contrario, il capitale a frutto non diminuirebbe mai e la rendita continuerebbe all'infinito. Però in generale il valore di n non é un numero intero; se consideriamo $n = m + f$, con $m \in \mathbb{Z}_+$ e $f \in (0,1)$, si può dedurre che l'investimento é sufficiente a pagare m rate, ma non $m+1$, cioè il residuo dopo il pagamento dell'm-esima rata, capitalizzato per un anno al tasso i, produce un montante minore della rata R. Per l'esattezza, il capitale che residua ammonterà a:

$$A(1+i)^m - Rs_{\overline{m}|i} = R\frac{1-(1+i)^{-(m+f)}}{i}(1+i)^m - R\frac{(1+i)^m - 1}{i} =$$

$$= R\frac{1-(1+i)^{-f}}{i};$$

essendo $f < 1$, questa quantità risulta minore di R.

Esercizio 64. ***Un capitale di 8.500 euro é depositato in un fondo che rende in ragione del 10,5% annuo, nel regime dell'interesse composto. Da questo fondo si prelevano 2.000 euro alla fine di ogni anno. Dopo quanto tempo si esaurisce il capitale di partenza?***

Il caso in questione é quello di una rendita annua immediata posticipata della quale sono noti la rata $R = 2.000$ *euro ed il valore attuale* $A = 8.500$ *euro al tasso* $i = 0,105$. *Di conguenza, possiamo scrivere la seguente equazione nell'incognita* n:

$$8.500 = 2.000 \cdot a_{\overline{n}|0,105} \implies 17 = 4 \cdot \frac{1-(1,105)^{-n}}{0,105} \implies$$

$$\implies -0,55375 = -(1,105)^{-n} \implies n = -\frac{\ln(0,55375)}{\ln(1,105)},$$

quindi $n = 5,919$ *anni. Con i dati assegnati, allora, é possibile prelevare dal fondo rate annuali di 2.000 euro per cinque anni consecutivi, ma non per il sesto.*

3.3.2 Determinazione della rata

Vediamo alcuni esercizi in cui ciò che va determinato é la rata della rendita, sulla base delle altre informazioni rilevanti.

Esercizio 65. ***Tramite versamenti mensili posticipati e costanti in un fondo che si capitalizza al tasso annuo del 14% in un regime di interesse composto, si vuole arrivare ad accumulare, dopo 8 anni, una somma di 15.000 euro. Qual é l'ammontare del versamento necessario?***

In questo caso, a partire da un montante noto, dobbiamo risalire alla rata R. Essendo i versamenti mensili, dobbiamo estrapolare il tasso d'interesse mensile $i_{1/12}$ *equivalente a quello annuo del 14%:*

$$(1+i_{1/12})^{12} = 1+i \implies i_{1/12} = (1+0,14)^{1/12} - 1 = 1,09\%.$$

Successivamente, applichiamo la formula del montante, con $8 \times 12 = 96$ *mensilità:*

$$15.000 = Rs_{\overline{96}|0,0109} = R\frac{(1,0109)^{96} \cdot (1-(1,0109)^{-96})}{0,0109} = 168R,$$

da cui $R = \dfrac{15.000}{168} = 89,28$ *euro, ed essendo le rate da pagare 96, il versamento necessario totale ammonterà a* $96 \cdot 89,28 = 8570,93$ *euro.*

Esercizio 66. ***Tramite versamenti mensili posticipati e costanti in un fondo che si capitalizza al tasso annuo del 12%, in un regime di interesse composto, si vuole arrivare ad accumulare, in capo a 20 anni, quanto é necessario per disporre, durante i 20 anni seguenti, di una rendita mensile posticipata di rata 500 euro. Qual é l'ammontare del versamento necessario?***

Il problema é analogo al precedente, ma in questo caso il montante da accumulare mediante il pagamento periodico della rata, anche qui incognita, deve uguagliare il valore attuale della rendita descritta. Tale rendita é ventennale, di rata annua $500 \cdot 12 = 6.000$ *euro frazionata in 12 pagamenti posticipati. Il tasso nominale* $j(12)$ *é dato da:*

$$j(12) = 12 \cdot i_{1/12} = 12 \cdot [(1,12)^{1/12} - 1] = 11,38\%.$$

Uguagliando dunque le due formule, otteniamo:

$$6.000\frac{1-(1,12)^{-20}}{0,1138} = 12R\frac{(1,12)^{20}-1}{0,1138} \implies$$
$$\implies 500 = (1,12)^{20}R \implies R = 51,83 \text{ euro.}$$

3.3.3 Determinazione del tasso

Un problema differente, e di soluzione leggermente più elaborata, connesso allo studio delle rendite, é la determinazione del tasso d'interesse in base al quale una rendita avrebbe un certo valore attuale, o montante, assegnato. Vediamo un primo esempio elementare per cui abbiamo bisogno soltanto della formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.

Esercizio 67. ***Una rendita periodica annuale $\mathcal{R}$ ha solo 3 rate, di rispettive entità:***

$$\mathcal{R}_1 = 1.200 \text{ \textbf{\textit{euro,}}} \quad \mathcal{R}_2 = 1.600 \text{ \textbf{\textit{euro,}}} \quad \mathcal{R}_3 = 2.800 \text{ \textbf{\textit{euro,}}}$$

e il suo montante é uguale a 6.400 euro. Calcolare il tasso annuo di interesse della rendita.

Usando la variabile che normalmente indica il fattore di capitalizzazione ($r = 1 + i$), scriviamo la formula del montante:

$$V(\mathcal{R}, 3) = 1.200r^2 + 1.600r + 2.800 = 6.400 \implies 3r^2 + 4r - 9 = 0,$$

una semplice equazione le cui radici sono (con la formula ridotta):

$$r_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{31}}{3},$$

di cui prendiamo soltanto la soluzione positiva, perchè l'altra, essendo negativa, non rispetta l'assiomatizzazione della capitalizzazione, e quindi é priva di significato economico. Infine, ricaviamo il tasso annuo di interesse:

$$r = \frac{-2 + \sqrt{31}}{3} \implies i = r - 1 = \frac{-5 \pm \sqrt{31}}{3} \simeq 0,189254,$$

quindi il tasso d'interesse della rendita é circa il $18,92\%$.

In generale, quindi, il problema della determinazione del tasso di una rendita si configura come un altro dei possibili problemi inversi rispetto a quello diretto del calcolo del suo valore.

Ad esempio, può avere senso chiedersi se sia più conveniente l'acquisto di un bene mediante pagamento in contanti oppure a rate. Se chiamiamo P il prezzo in contanti da pagare ed R la rata costante di un'eventuale rendita, converrà pagare anticipatamente se il costo dell'oggetto sarà minore del valore della rendita, cioè se $P < Ra_{\overline{n}|i}$. Di conseguenza, ricordando che la decrescenza del valore attuale nell'argomento del tasso d'interesse, ossia $a_{\overline{n}|i} < a_{\overline{n}|j}$ se $i > j$, il tasso d'interesse j tale che $P = Ra_{\overline{n}|j}$ sarà quello per cui il pagamento a rate e quello in contanti saranno uguali. Una rendita con tasso d'interesse più alto di j avrà valore attuale minore, e di conseguenza in quel caso converrà il pagamento a rate. In pratica, j é il massimo tasso d'interesse per cui conviene il pagamento in un'unica soluzione piuttosto che quello a rate.

Esercizio 68. ***Data una rendita annua costante anticipata di rata*** R ***di durata 4 anni, stabilire il tasso annuo di valutazione*** i ***tale che il suo montante risulti del*** 60% ***maggiore del suo valore attuale.***

In questo caso, dire che il montante supera del 60% *il valore attuale significa dire che il primo é uguale al* 160% *del secondo. Impostando questa uguaglianza e semplificando, si ha:*

$$\frac{160}{100} R a_{\overline{4}|i} = R(1+i)^4 a_{\overline{4}|i} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (1+i)^4 = \frac{8}{5},$$

da cui

$$i = \left(\frac{8}{5}\right)^{1/4} - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad i = 0,1246 = 12,46\%.$$

In generale, la determinazione del tasso può risultare molto più complessa, quindi avremo bisogno di un metodo di approssimazione.

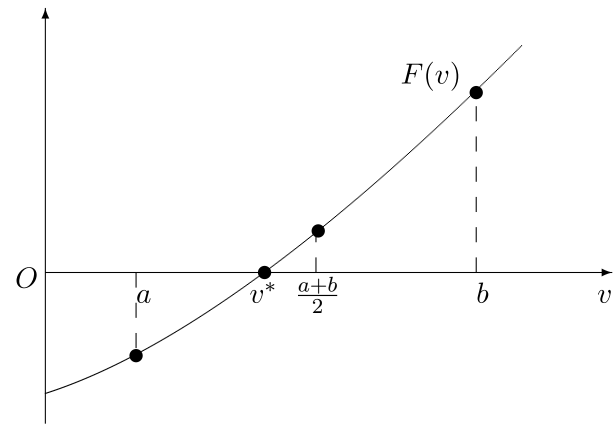
3.3.4 Il Metodo delle Approssimazioni Successive

Consideriamo ad esempio la situazione in cui, essendo note le quantità A, R ed n, la nostra incognita é i, o anche, equivalentemente, $v = (1+i)^{-1}$; la formula fondamentale di una rendita annua costante posticipata immediata diventa dunque un'equazione nell'incognita v:

$$A = R(v + v^2 + \ldots + v^n) \implies \sum_{j=1}^{n} v^j = \frac{A}{R},$$

che per la ben nota teoria delle radici dei polinomi, essendo $v > 0$, possiede una ed una sola soluzione reale positiva. Le eventuali soluzioni negative oppure complesse non hanno significato economico e quindi possono essere trascurate. Il problema della determinazione, o quantomeno dell'approssimazione di questa radice, si può affrontare in vari modi, come il Metodo delle Tangenti di Newton (o altri similari, vedi il Capitolo 7 di [R]) oppure quello cosiddetto delle Approssimazioni Successive. Analizziamo brevemente il secondo, più facile ed intuitivo: detta $F(v) = v + v^2 + \ldots + v^n - \frac{A}{R}$, il nostro obiettivo é quello di trovare la migliore approssimazione possibile del valore di v^* tale che $F(v^*) = 0$.

Il primo passo consiste nel trovare due valori a e b, entrambi positivi, tali che $F(a) < 0$ e $F(b) > 0$; per la continuità di $F(v)$, in questo modo individuiamo un intervallo della semiretta positiva reale che contiene lo zero della funzione, ossia $\exists\, c \in (a, b)$ con $F(c) = 0$. Nella figura seguente, vediamo un caso in cui $F(a) < 0$, $F(b) > 0$, e l'immagine del punto medio é positiva, cioè $F\left(\dfrac{a+b}{2}\right) > 0$, quindi $v^* \in \left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$.



Una schematizzazione del Metodo delle Approssimazioni Successive.

Successivamente, prendiamo il punto medio dell'intervallo, vale a dire $\dfrac{a+b}{2}$, e valutiamo $F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. Se $F\left(\dfrac{a+b}{2}\right) < 0$, allora saremo certi che $c \in \left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$, in caso contrario $c \in \left(a, \dfrac{a+b}{2}\right)$. Non é restrittivo considerare soltanto il primo dei due casi; prendiamo ora il punto medio dell'intervallo $\left(\dfrac{a+b}{2}, b\right)$, vale a dire $\dfrac{a+3b}{4}$ e ripetiamo il ragionamento fatto in precedenza: se $F\left(\dfrac{a+3b}{4}\right) < 0$, allora la soluzione cercata apparterrà all'intervallo $\left(\dfrac{a+3b}{4}, b\right)$, in caso contrario dovremo considerare l'intervallo $\left(\dfrac{a+b}{2}, \dfrac{a+3b}{4}\right)$, e così via. Il metodo descritto é di tipo iterativo, e ad ogni passaggio successivo si restringe l'intervallo considerato e ci si avvicina alla soluzione esatta.

Esiste una remota possibilità di imbattersi, durante l'algoritmo, nella soluzione esatta, cioè il valore che annulla $F(v)$. Di certo abbiamo la possibilità di scegliere l'approssimazione voluta, con un margine di errore arbitrario, del valore cercato. Naturalmente, la velocità computazionale dell'algoritmo dipende, oltre che dal criterio di arresto, anche dall'ampiezza dell'intervallo iniziale scelto.

Esercizio 69. ***Determinare, con tre cifre decimali esatte, il tasso che é stato applicato a una rendita*** $\mathcal{R}$ ***annua posticipata di rate*** $R_1 = 1.800$ ***euro,*** $R_2 = 1.500$ ***euro,*** $R_3 = 1.200$ ***euro,*** $R_4 = 900$ ***euro affinchè il suo valore attuale risulti uguale a*** 5.200 ***euro.***

Per iniziare, scriviamo il valore attuale della rendita, considerando al solito v *il tasso annuo di sconto, e imponiamo che sia uguale al valore richiesto:*

$$A(0,\mathcal{R}) = 1.800v + 1.500v^2 + 1.200v^3 + 900v^4 = 5.200.$$

La funzione a cui applicare il metodo delle approssimazioni successive, per trovarne uno zero, sarà quindi:

$$F(v) = 900v^4 + 1.200v^3 + 1.500v^2 + 1.800v - 5.200.$$

Partendo al solito dall'intervallo $(0,1)$*, notiamo immediatamente che* $F(0) = -5.200$*,* $F(1) = 200$*, quindi siamo sicuri dell'esistenza della soluzione* v^* *nell'intervallo* $(0,1)$*. Il punto medio dell'intervallo é ovviamente* $0,5$*, e notiamo che:*

$$F(0,5) = 900\cdot(0,5)^4 + 1.200\cdot(0,5)^3 + 1.500\cdot(0,5)^2 + 1.800\cdot 0,5 - 5.200 = -3.718,75.$$

Siccome $F(0,5) < 0$ *e* $F(1) > 0$*, il primo step ci garantisce che* v^* *é contenuta tra* 0.5 *e* 1*. Da notare che non bisogna dividere tutta la funzione per 100, altrimenti i valori verranno 100 volte più piccoli. Dimezzando ancora l'intervallo, otteniamo* $\frac{0,5+1}{2} = 0,75$*. Quindi, calcoliamo* $F(0,75)$*:*

$$F(0,75) = 900\cdot(0,75)^4 + 1.200\cdot(0,75)^3 + 1.500\cdot(0,75)^2 +$$

$$+1.800\cdot 0,75 - 5.200 = -2.215,234,$$

ancora un valore negativo. Perciò al secondo passaggio, abbiamo scoperto che $0,75 < v^* < 1$*. Dimezziamo ulteriormente l'intervallo:* $\frac{0,75+1}{2} = 0,875$*. Ripetendo il solito calcolo, avremo:*

$$F(0,875) = -1.145,092 \qquad \Longrightarrow \qquad 0,875 < v^* < 1.$$

Iterando il procedimento, avremo i seguenti valori:

$$F(0,9375) = -510,142 \qquad \Longrightarrow \qquad 0,9375 < v^* < 1.$$

Da notare che a questo punto, abbiamo trovato la prima cifra di approssimazione dopo la virgola, che é il 9*. Continuiamo:*

$$F(0,96875) = -164,891 \qquad \Longrightarrow \qquad 0,96875 < v^* < 1.$$

$$F(0,984375) = 15,045.$$

Poichè abbiamo finalmente trovato un valore positivo, consideriamo l'intervallo tra gli ultimi due valori discordi, cioè abbiamo scoperto che

$$0,96875 < v^* < 0,984375.$$

$$F(0,9765625) = -76,263 \qquad \Longrightarrow \qquad 0,9765625 < v^* < 0,984375.$$

Il punto medio sarebbe 0,98046875*. Tagliando qualche cifra per non appesantire eccessivamente, calcoliamo:*

$$F(0,9804) = -31,202 \qquad \Longrightarrow \qquad 0,9804 < v^* < 0,984375.$$

Abbiamo quindi trovato anche la seconda cifra: se l'approssimazione fosse solo a 2 cifre, potremmo già concludere che v^* *vale* 0,98*. Ma proseguiamo ancora:*

$$F(0,9823) = -9,136 \qquad \Longrightarrow \qquad 0,9823 < v^* < 0,984375.$$

$$F(0,9833) = 2,506 \qquad \Longrightarrow \qquad 0,9823 < v^* < 0,9833.$$

$$F(0,9828) = -3,318 \qquad \Longrightarrow \qquad 0,9828 < v^* < 0,9833.$$

$$F(0,98305) = -0,406 \qquad \Longrightarrow \qquad 0,98305 < v^* < 0,9833,$$

quindi la terza cifra dopo la virgola é 3. Di conseguenza, $v^* \simeq 0,983$*, e infine tornando indietro al tasso annuo si ha:*

$$i^* = \frac{1}{v^*} - 1 \simeq 1,73\%.$$

Capitolo 4

Ammortamenti e valutazione dei prestiti

4.1 Generalità sull'ammortamento

Una delle situazioni finanziarie più comuni nella vita reale é quella in cui un agente economico cerchi di ottenere un finanziamento immediatamente disponibile, contraendo un prestito, ed impegnandosi a restituirlo progressivamente. Tipicamente, il mutuo per l'acquisto di un immobile, e in generale il credito al consumo nelle sue varie forme, rientrano in questa tipologia di operazione.

L'insieme delle specifiche relative ai tempi di rimborso del capitale e al pagamento degli interessi si chiama il **piano di rimborso o di ammortamento** del prestito. Considerando la situazione standard, lo schema e la terminologia classici sono i seguenti:

- Un primo soggetto presta ad un secondo soggetto un ammontare di capitale, C, concordando le modalità di ammortamento del prestito.

- L'ammortamento avverrà tramite **rate (o annualità)** R_k, rispettivamente in scadenza ai tempi $k = 1, 2, \dots, n$.

- Ogni rata R_k si decomporrà in due diverse quote: $R_k = C_k + I_k$, rispettivamente dette **quote capitale** (C_k) e **quote interessi** (I_k).

- Alla fine del k-esimo anno, viene calcolato il debito ancora da rimborsare negli anni successivi, il cosiddetto **debito residuo** (D_k). Ad ogni pagamento di quota capitale C_k, il debito residuo decresce secondo la relazione di ricorrenza:
$$D_k = D_{k-1} - C_k.$$

- Alla fine del k-esimo anno, si calcola il debito già pagato, il cosiddetto **debito estinto** (E_k). Ad ogni pagamento di quota capitale C_k, il debito estinto cresce secondo la relazione di ricorrenza:

$$E_k = E_{k-1} + C_k.$$

- La quota interessi I_k da versare al k-esimo anno é determinata proporzionalmente al debito residuo del periodo precedente con costante uguale al **tasso di remunerazione**) i:

$$I_k = i \cdot D_{k-1}. \tag{4.1.1}$$

  Al solito, useremo la capitalizzazione composta con fattore di sconto $v = (1+i)^{-1}$.

- La somma delle quote capitali deve soddisfare la cosiddetta **condizione di chiusura**, cioè:

$$\sum_{k=1}^{n} C_k = C.$$

Possiamo notare banalmente che ad ogni periodo (diciamo periodo perchè, anche se utilizzeremo sempre gli anni, questo schema si può facilmente generalizzare a periodi di durata diversa), la somma del debito residuo e del debito estinto é costante e uguale all'ammontare C:

$$D_k + E_k = D_{k-1} + E_{k-1} = \ldots = D_0 + E_0 = C.$$

Detto $W(\tau, \mathcal{A})$ il valore al tempo τ delle rate R_k, potremo notare che il loro valore attuale é esattamente uguale all'ammontare C da rimborsare, in base al tasso i di remunerazione del prestito:

$$A(0, \mathcal{A}) = \sum_{k=1}^{n} R_k v^k = C.$$

Un prestito può comunque essere estinto completamente prima della scadenza concordata tra le parti, con o senza il pagamento di una penale aggiuntiva. Se non c'é alcuna penale, la cifra che il debitore deve pagare per estinguere anticipatamente al tempo $\tau < n$ é il debito residuo D_τ.

Inoltre, possiamo valutare in qualsiasi istante τ la rendita costituita dalle rate di ammortamento ancora da rimborsare. Per questo scopo, possiamo anche ricorrere ad un tasso di valutazione differente da quello utilizzato per la remunerazione. Se torniamo a decomporre ogni rata in somma di quota capitale e quota interesse, e ne calcoliamo separatamente i valori attuali, avremo due altre importanti informazioni per la valutazione del prestito. Supponiamo di scegliere un nuovo tasso di valutazione $j \neq i$. Avremo (riordinando l'ordine degli argomenti: prima l'operazione, poi il tempo, poi il tasso di valutazione):

$$A(\mathcal{A}, \tau, j) = \sum_{k=\tau+1}^{n} R_k(1+j)^{\tau-k} = \sum_{k=\tau+1}^{n} C_k(1+j)^{\tau-k} + \sum_{k=\tau+1}^{n} I_k(1+j)^{\tau-k} =$$

$$= NP(\mathcal{A}, \tau, j) + U(\mathcal{A}, \tau, j).$$

Definizione 70. *$NP(\mathcal{A}, \tau, j)$ ed $U(\mathcal{A}, \tau, j)$, rispettivamente i valori attuali delle sole quote capitale e delle sole quote interesse al tempo τ e al tasso di valutazione j sono detti* ***nuda proprietà*** *ed* ***usufrutto****.*

Mentre la nuda proprietà e l'usufrutto sono dati riferiti ad un determinato istante di valutazione, abbiamo anche un indice globale che ci permette di pesare l'importanza del pagamento delle sole quote interessi rispetto all'ammontare da rimborsare.

Definizione 71. *Si chiama* ***indice di onerosità*** *il rapporto γ tra la somma di tutte le quote interessi da pagare e il capitale a prestito:*

$$\gamma = \frac{\sum_{k=1}^{n} I_k}{C}.$$

Usualmente, tutti i dati relativi all'ammortamento di un prestito vengono collocati in una cosiddetta **tabella di ammortamento**, ossia uno schema del genere:

Anno	Rata	Q. capitale	Q. interesse	D. residuo	D. estinto
0	0	0	0	$D_0 = C$	$E_0 = 0$
1	R_1	C_1	I_1	D_1	$E_1 = C - D_1$
2	R_2	C_2	I_2	D_2	$E_2 = C - D_2$
...	...	...	...	...	...
$n-1$	R_{n-1}	C_{n-1}	I_{n-1}	D_{n-1}	$E_{n-1} = C - D_{n-1}$
n	R_n	C_n	I_n	$D_n = 0$	$E_n = C$

Vediamo qui di seguito due possibili problemi standard di ammortamento.

Esercizio 72. ***Supponiamo di dover ammortizzare un prestito di 3.000 euro in tre anni con tre versamenti annuali al tasso di remunerazione del*** **4%*****; se la prima e la seconda rata fossero di 1.000 euro, a quanto dovrebbe ammontare la terza ed ultima rata? E quali sono i valori***

della nuda proprietà e dell'usufrutto all'inizio del secondo anno al tasso di valutazione del* 5%*?

I dati dell'esercizio possono essere riassunti in una tabella incompleta iniziale:

k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	0	0	0	3.000	0
1	1.000				
2	1.000				
3					

Calcoliamo tutti i dati dell'ammortamento anno per anno, per poi inserirli in un'apposita tabella:

- *All'anno 0, le quote sono entrambe nulle, la rata é nulla, il debito residuo* D_0 *coincide con l'ammontare* $C = 3.000$ *euro, il debito estinto* E_0 *é uguale a* 0*;*

- *all'anno 1, calcoliamo prima la quota interessi con la formula (4.1.1), usando il tasso* $i = 4/100$*:*

$$I_1 = i \cdot D_0 = \frac{4}{100} \cdot 3.000 = 120 \text{ euro.}$$

  Di conseguenza, dovendo essere $R_1 = 1.000$ *euro, ricaviamo la quota capitale per differenza:* $C_1 = R_1 - I_1 = 880$ *euro. Quindi il debito residuo si ottiene anch'esso per differenza tra l'ammontare da rimborsare e la prima quota capitale:* $D_1 = C - C_1 = 2.120$ *euro. Il debito estinto corrisponde invece alla prima quota capitale versata:* $E_1 = 880$ *euro;*

- *all'anno 2, riutilizzando la formula (4.1.1), otteniamo*

$$I_2 = \frac{4}{100} \cdot 2.120 = 84,8 \text{ euro} \implies C_2 = 915,2 \text{ euro.}$$

  Il debito residuo si calcola scalando dal debito residuo al periodo precedente la nuova quota capitale, per cui

$$D_2 = D_1 - C_2 = 2.120 - 915,2 = 1.204,8 \text{ euro.}$$

  Il debito estinto, al solito, per differenza con l'ammontare totale: $E_2 = 3.000 - 1204,8 = 1795,2.$ *euro;*

- *veniamo all'ultimo anno: con la solita formula, la quota interessi risulta* $I_3 = 48,192$ *euro, mentre la quota capitale coincide con il debito residuo al periodo precedente, ossia* $C_3 = D_2 = 1.204,8$ *euro. Per cui l'ultima rata ammonterà a* $R_3 = C_3 + I_3 = 1.252,992$ *euro. Infine, ovviamente,* $D_3 = 0$ *euro,* $E_3 = 3.000$ *euro. Da notare anche il fatto che l'ultima quota capitale si può anche ricavare dalla condizione di chiusura:*

$$C_3 = C - C_1 - C_2 = 3.000 - 880 - 915,2 = 1.204,8 \text{ euro.}$$

Riassumendo, la tabella di ammortamento ha la forma seguente:

k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	0	0	0	3.000	0
1	1.000	880	120	2.120	880
2	1.000	915,2	84,8	1204,8	1.795,2
3	1.252,992	1.204,8	48,192	0	3.000

Per quanto riguarda il calcolo della nuda proprietà e dell'usufrutto, poichè esso va riferito alla fine del primo anno, bisognerà considerare soltanto le ultime due rate con le rispettive quote, al nuovo tasso $j = 5/100$. *Avremo:*

$$NP(\mathcal{A}, 1, 5/100) = C_2(1+j)^{1-2} + C_3(1+j)^{1-3} =$$

$$= 915,2 \cdot (1,05)^{-1} + 1.204,8 \cdot (1,05)^{-2} = 1.964,217687 \text{ euro,}$$

$$U(\mathcal{A}, 1, 5/100) = I_2(1+j)^{1-2} + I_3(1+j)^{1-3} =$$

$$= 84,8 \cdot (1,05)^{-1} + 48,192 \cdot (1,05)^{-2} = 124,473469 \text{ euro.}$$

Esercizio 73. ***Consideriamo un prestito di ammontare*** C ***da ammortizzare in 4 rate annuali. Se le quote capitale dell'ammortamento sono costanti e tutte uguali a*** 600 ***euro, e il tasso di remunerazione é del*** 2%***, compilare la tabella di ammortamento e calcolare nuda proprietà e usufrutto dopo 3 anni e mezzo al tasso di valutazione del*** $3,2\%$***.***

Prima di tutto, applichiamo la condizione di chiusura per calcolare l'ammontare complessivo C. *Siccome le quote capitali sono costanti e uguali a* 600 *euro, si ha:*

$$C = 600 \cdot 4 = 2.400 \text{ euro.}$$

Quindi, $D_0 = C = 2.400$. *Successivamente, ricaviamo le quote interesse sostituendo il tasso del* 2% *nella formula (4.1.1):*

$$I_1 = \frac{2}{100} \cdot 2.400 = 48 \text{ euro,} \quad D_1 = 2.400 - 600 = 1.800 \text{ euro.} \quad E_1 = 600 \text{ euro.}$$

$$I_2 = \frac{2}{100} \cdot 1.800 = 36 \text{ } euro, \quad D_2 = 1.800 - 600 = 1.200 \text{ } euro. \quad E_2 = 1.200 \text{ } euro.$$

$$I_3 = \frac{2}{100} \cdot 1.200 = 24 \text{ } euro, \quad D_3 = 1.200 - 600 = 600 \text{ } euro. \quad E_3 = 1.800 \text{ } euro.$$

$$I_4 = \frac{2}{100} \cdot 600 = 12 \text{ } euro, \quad D_4 = 600 - 600 = 0 \text{ } euro. \quad E_4 = 2.400 \text{ } euro.$$

Perciò la tabella di ammortamento completa risulta:

k	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	*0*	*0*	*0*	*2.400*	*0*
1	*648*	*600*	*48*	*1.800*	*600*
2	*636*	*600*	*36*	*1.200*	*1.200*
3	*624*	*600*	*24*	*600*	*1.800*
4	*612*	*600*	*12*	*0*	*2.400*

Per calcolare nuda proprietà e usufrutto a 3,5 anni, dobbiamo tenere conto del fatto che a quell'epoca c'é ancora da riscuotere un'unica ultima rata di rimborso, quindi avremo semplicemente:

$$NP(\mathcal{A}, 7/2, 32/1.000) = C_4(1{+}0,032)^{7/2-4} = 600(1,032)^{-1/2} = 590,624423 \text{ } euro.$$

$$U(\mathcal{A}, 7/2, 32/1.000) = I_4(1+0,032)^{7/2-4} = 12(1,032)^{-1/2} = 11,812488 \text{ } euro.$$

Possono esserci vari casi di ammortamento, non necessariamente classificati tra i casi standard che vedremo nei paragrafi successivi. Consideriamo ad esempio il caso di un prestito rimborsabile a scadenza, in cui tutte le quote interessi sono costanti, e uguali a Ci, e le quote capitale sono tutte nulle fino all'ultima, che é C. In questo caso, la tabella sarà:

Anno	Rata	Q. capitale	Q. interesse	D. residuo	D. estinto
0	0	0	0	C	0
1	R_1	0	Ci	C	0
2	R_2	0	Ci	C	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$n-1$	R_{n-1}	0	Ci	C	0
n	R_n	C	Ci	0	C

Il valore attuale della somma di tutte le annualità sarà:

$$Civ + Civ^2 + \ldots + Civ^n + Cv^n = Ci \sum_{k=1}^{n} v^k + Cv^n =$$

$$= Ci(1+i)^{-1}\frac{1-(1+i)^{-n}}{1-(1+i)^{-1}} + C(1+i)^{-n} = C(1-(1+i)^{-n} + (1+i)^{-n}) = C.$$

I prossimi paragrafi sono dedicati ai casi principali di ammortamento. Negli esempi ed esercizi proposti, useremo tipicamente le approssimazioni con 3 cifre decimali.

4.2 Ammortamento francese

Quest'ammortamento é quello in assoluto più utilizzato nella pratica corrente, e la sua particolarità sta nel fatto che le rate di rimborso sono costanti e posticipate. Il valore della rata costante R si può facilmente ricavare dal fatto che il debitore in questo caso si trova vincolato al pagamento di una rendita annua costante posticipata, di durata uguale a quella del prestito:

$$C = Ra_{\overline{n}|i} \implies R = \frac{C}{a_{\overline{n}|i}}.$$

Praticamente, decomponendo il valore della rendita nei suoi termini, la quota capitale sarà Rv^n e quella interessi $R(1-v^n)$ al primo anno, rispettivamente Rv^{n-1} e $R(1-v^{n-1})$ al secondo anno, fino all'n-esimo anno, in cui saranno Rv e $R(1-v)$.

Invece, il debito residuo al termine dell'h-esimo anno (per $h = 1, \dots, n-1$) risulterà:

$$D_h = R \cdot a_{\overline{n-h}|i} = C\frac{a_{\overline{n-h}|i}}{a_{\overline{n}|i}},$$

perchè il debitore dovrà ancora corrispondere un ammontare pari al valore attuale di una rendita di altre $n-h$ rate posticipate di uguale ammontare, R.

Al solito, determiniamo per differenza il debito estinto:

$$E_h = C - D_h = Ra_{\overline{n}|i} - Ra_{\overline{n-h}|i} = {}_{n-h|}\, a_{\overline{h}|i},$$

corrispondente quindi al valore attuale di una rendita posticipata di durata h anni differita di $n-h$ anni.

La tabella seguente fornisce uno schema dell'ammortamento francese:

Anno	Rata	Q. capitale	Q. interesse	D. residuo	D. estinto
0	0	0	0	$Ra_{\overline{n}\|i}$	0
1	R	Rv^n	$R(1-v^n)$	$Ra_{\overline{n-1}\|i}$	Rv^n
2	R	Rv^{n-1}	$R(1-v^{n-1})$	$Ra_{\overline{n-2}\|i}$	$R(v^n+v^{n-1})$
...	...	...	...	...	...
n	R	Rv	$R(1-v)$	0	$Ra_{\overline{n}\|i}$

Esercizio 74. ***Supponiamo di voler rimborsare un prestito di ammontare 10.000 euro in 5 anni, al tasso di remunerazione del*** 10% ***annuo, secondo un piano di tipo francese. Compilare la tabella di ammortamento.***

Al solito, procediamo passo per passo, incominciando a calcolare la rata di ammortamento costante R:

$$R = \frac{C}{a_{\overline{n}|i}} \implies R = \frac{10.000}{a_{\overline{5}|0,1}} = \frac{10.000 \cdot 0,1}{1-(1,1)^{-5}} = 2.637,974 \text{ euro.}$$

Successivamente, calcoliamo le varie quote e i vari debiti applicando semplicemente le formule (approssimiamo alla terza cifra decimale):

1. *Al primo anno, avremo:*

   $C_1 = 2.637,974 \cdot (1,1)^{-5} = 1.637,974$ *euro,*

   $I_1 = 2.637,974 - 1.637,974 = 1.000$ *euro,*

   $$D_1 = \frac{2.637,974 \cdot [1-(1,1)^{-4}]}{0,1} = 8.362,022 \text{ euro,}$$

   $E_1 = C_1 = 1.637,974$ *euro.*

2. *Al secondo anno:*

   $C_2 = 2.637 \cdot (1,1)^{-4} = 1.801,771$ *euro,*

   $I_2 = 836,203$ *euro,*

   $$D_2 = \frac{2.637,974 \cdot [1-(1,1)^{-3}]}{0,1} = 6.560,25 \text{ euro,}$$

   $E_2 = 1.637,974 + 1.801,771 = 4.439,745$ *euro.*

Proseguendo con le stesse formule fino al quinto anno, la tabella richiesta risulterà:

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	*0*	*0*	*0*	*10.000*	*0*
1	*2.637,974*	*1.637,974*	*1.000*	*8.362,022*	*1.637,974*
2	*2.637,974*	*1.801,771*	*836,203*	*6.560,25*	*3.439,745*
3	*2.637,974*	*1.981,948*	*656,026*	*4.578,301*	*5.421,693*
4	*2.637,974*	*2.180,143*	*457,831*	*2.398,158*	*7.601,836*
5	*2.637,974*	*2.398,158*	*239,816*	*0*	*10.000*

Da notare il fatto che può capitare che, per via degli arrotondamenti, qualche valore finale può risultare appena impreciso, ad esempio qui il debito estinto E_5 *sarebbe venuto di 9.999,994 euro, ma é un errore nell'ordine dei millesimi, banalmente arrotondabile.*

Esercizio 75. ***Ricavare tutti i dati, e la relativa tabella di ammortamento, di un piano di rimborso di tipo francese di 4 anni, al tasso di remunerazione del*** $4,5\%$***, con rata costante di*** 1.500 ***euro. Calcolare inoltre nuda proprietà e usufrutto all'inizio dell'ultimo anno ad un tasso di valutazione del*** $6,1\%$***.***

In questo tipo di esercizio, abbiamo il dato della rata ma non quello dell'ammontare totale del debito da ammortizzare. Quindi, preliminarmente calcoliamo l'ammontare C:

$$C = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 1.500 \cdot \frac{0,161438}{0,045} = 5.381,288 \text{ euro.}$$

Questo é dunque anche il debito residuo all'anno 0. Ora, applichiamo le formule che conosciamo:

1. *Al primo anno, avremo:*

   $C_1 = 1.500 \cdot (1,045)^{-4} = 1.257,842$ *euro,*

   $I_1 = 1.500 - 1.257,842015 = 242,158$ *euro,*

   $D_1 = 1.500 \cdot \dfrac{1-(1,045)^{-3}}{0,045} = 4.123,446$ *euro,*

   $E_1 = C_1 = 1.257,842$ *euro.*

2. *Al secondo anno:*

   $C_2 = 1.500 \cdot (1,045)^{-3} = 1.314,444$ *euro,*

   $I_2 = 1.500 - 1.314,444 = 185,556$ *euro,*

   $D_2 = 1.500 \cdot \dfrac{1-(1,045)^{-2}}{0,045} = 2.809,001$ *euro,*

   $E_2 = E_1 + C_2 = 1.257,842 + 1.314,444 = 2.572,286$ *euro.*

Completando il calcolo sui due anni successivi, la tabella di ammortamento risulta come segue (approssimiamo sempre alla terza cifra decimale):

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	*0*	*0*	*0*	*5.381,288*	*0*
1	*1.500*	*1.257,842*	*242,158*	*4.123,446*	*1.257,842*
2	*1.500*	*1.314,444*	*185,556*	*2.809,001*	*2.572,286*
3	*1.500*	*1.373,594*	*126,406*	*1.435,406*	*3.945,88*
4	*1.500*	*1.435,406*	*64,594*	*0*	*5.381,286*

Concludiamo calcolando nuda proprietà e usufrutto:

$$NP(\mathcal{A}, 3, 0,061) = C_4(1 + 0,061)^{3-4} = 1.435,406(1,061)^{-1} = 1.352,88 \text{ \textit{euro}.}$$

$$U(\mathcal{A}, 3, 0.061) = I_4(1 + 0,061)^{3-4} = 64,594(1,061)^{-1} = 60,88 \text{ \textit{euro}.}$$

4.3 Ammortamento tedesco

Il piano di ammortamento di tipo tedesco si differenzia da quello francese per un fatto cruciale: le rate, anche se costanti, vengono corrisposte anticipatamente. Di conseguenza, la rata R é legata al capitale C da rimborsare dalla relazione:

$$C = R \cdot \ddot{a}_{\overline{n}|i} \implies C = R \cdot (1 + i) \cdot a_{\overline{n}|i} \implies R = \frac{C}{(1 + i)a_{\overline{n}|i}}.$$

Alternativamente, possiamo scrivere

$$R = \frac{Ci}{1 + i - (1 + i)^{-n+1}}.$$

Puntualizziamo fin da subito di intendere per ammortamento tedesco quello caratterizzato da rate costanti anticipate (in alcuni testi ci si riferisce invece ad un ammortamento con quote capitale costanti, come quello italiano). Per il resto, va adottata la convenzione che qui la quota interesse va riportata sulla stessa riga in cui compare il debito residuo da cui é ottenuta, quindi rispetto all'ammortamento francese la colonna delle quote interesse risulta spostata verso l'alto di un periodo. Una formula di ricorrenza ulteriore che si può utilizzare per il debito residuo é:

$$D_k = (D_{k-1} - R)(1 + i).$$

Di conseguenza, potremo scrivere una tabella di ammortamento tedesco esemplificativa nel modo seguente:

Anno	Rata	Q. capitale	Q. interesse	D. residuo	D. estinto
0	$R(1 - v^n)$	0	$R(1 - v^n)$	$R\ddot{a}_{\overline{n}|i}$	0
1	R	Rv^{n-1}	$R(1 - v^{n-1})$	$R\ddot{a}_{\overline{n-1}|i}$	Rv^{n-1}
2	R	Rv^{n-2}	$R(1 - v^{n-2})$	$R\ddot{a}_{\overline{n-2}|i}$	$R(v^{n-1} + v^{n-2})$
...	...	...	...	...	...
n	R	R	0	0	$R\ddot{a}_{\overline{n}|i}$

Esercizio 76. ***Compilare la tabella di ammortamento per un piano di rimborso di tipo tedesco di 5 anni, al tasso di remunerazione del*** $2,5\%$***, dell'ammontare di*** 6.000 ***euro. Inoltre, calcolare l'indice di onerosità di questo ammortamento.***

Prima di tutto, ricaviamo la rata costante di questo rimborso:

$$R = \frac{C}{(1+i)a_{\overline{n|}i}} = \frac{6.000 \cdot 0,025}{1,025 - (1,025)^{-4}} = 1.259,981 \text{ euro.}$$

Ora stiliamo il piano, considerando anche l'anno precedente al primo anno:

1. *All'anno* 0*, dobbiamo calcolare la quota interesse. Si può fare in 2 modi: o la calcoliamo come da tabella, cioè:*

   $$R(1 - v^n) = 1.259,981 \cdot (1 - (1,025^{-5})) = 146,341 \text{ euro,}$$

   oppure, tenendo conto del fatto che questo interesse anticipato corrisponde al prodotto $C \cdot d = C \cdot i \cdot (1+i)^{-1}$*, possiamo anche calcolarlo come* $6.000 \cdot 0,025 \cdot (1,025)^{-1} = 146,341$ *euro.*

2. *Al primo anno, si calcolano le quote capitale e interesse come nell'ammortamento francese, ma scalando una riga:*

   $$C_1 = E_1 = 1.259,981(1,025)^{-4} = 1.141,48 \text{ euro.}$$

   $$I_1 = 1.259,981 - 1.141,48 = 118,501 \text{ euro.}$$

   $$D_1 = (D_0 - R)(1+i) = (6.000 - 1.259,981) \cdot 1,025 = 4.858,519 \text{ euro.}$$

3. *Si continua il calcolo negli anni successivi, ricordando che al quinto anno la quota interessi é nulla e la quota capitale coincide con l'ultima rata. In specifico:*

   $$C_2 = 1.259,981 \cdot (1,025)^{-3} = 1.170,017 \text{ euro,}$$

   $$I_2 = 1.259,981 - 1.141,48 = 89,964 \text{ euro,}$$

   $$E_2 = C_1 + C_2 = 1.141,48 + 1.170,017 = 2.311,497 \text{ euro,}$$

   $$D_2 = (D_1 - R)(1+i) = 3.688,502 \text{ euro,}$$

   $$C_3 = 1.259,981(1,025)^{-2} = 1.199,268 \text{ euro,}$$

   $$I_3 = R - C_3 = 1.259,981 - 1.199,268 = 60,713 \text{ euro,}$$

   $$E_3 = C_1 + C_2 + C_3 = 3.510,765 \text{ euro,}$$

   $$D_3 = (D_2 - R)(1+i) = 2.489,234 \text{ euro,}$$

$$C_4 = 1.259,981 \cdot (1,025)^{-1} = 1.229,249 \ euro,$$

$$I_4 = 1.259,981 - 1.229,249 = 30,732 \ euro,$$

$$E_4 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 4.740,014 \ euro,$$

$$D_4 = (D_3 - R)(1 + i) = 1.259,984 \ euro,$$

$$C_5 = R = 1.259,981 \ euro, \quad E_5 = 5.999,995 \ euro.$$

Dunque, la tabella di ammortamento risulta come segue:

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	*146,341*	*0*	*146,341*	*6.000*	*0*
1	*1.259,981*	*1.141,48*	*118,501*	*4.858,519*	*1.141,481*
2	*1.259,981*	*1.170,017*	*89,964*	*3.688,502*	*2.311,497*
3	*1.259,981*	*1.199,268*	*60,713*	*2.489,234*	*3.510,765*
4	*1.259,981*	*1.229,249*	*30,732*	*1.259,984*	*4.740,014*
5	*1.259,981*	*1.259,981*	*0*	*0,005*	*5.999,995*

Infine, ricaviamo l'indice di onerosità γ applicando la relativa formula, cioè sommando le 5 quote interessi e dividendo per il capitale prestato:

$$\gamma = \frac{146,341 + 118,501 + 89,964 + 60,713 + 30,732}{6.000} = 0,074375.$$

A volte può essere utile riempire una tabella di ammortamento incompleta, ricavando i dati mancanti da quelli già presenti in tabella, come nel caso seguente.

Esercizio 77. ***Compilare, in base ai dati presenti nella tabella, il seguente piano di ammortamento tedesco, relativo a un prestito da rimborsare in 4 anni, dopo averne ricavato il tasso di remunerazione annuo.***

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0		*0*	*105,62*		*0*
1	*1.000*				
2					
3					
4			*0*		

Siccome gli unici dati che abbiamo sono la rata costante e la prima quota interessi, possiamo ricavare immediatamente il tasso annuo:

$$I_0 = R(1-(1+i^*)^{-4}) \Longrightarrow (1+i^*)^{-4} = 1-\frac{I_0}{R} \Longrightarrow i^* = \left(\frac{1}{1-\frac{I_0}{R}}\right)^{\frac{1}{4}} -1 = 2,8\%.$$

Ora, ricaviamo tutti gli altri dati, partendo dal capitale totale C:

$$C = R(1+i)a_{\overline{n}|i} = 1.000 \cdot (1,028) \cdot \frac{1-(1,028^{-4})}{0,028} = 3.839,523.$$

$$C_1 = E_1 = 1.000(1,028)^{-3} = 920,493; \qquad I_1 = 1.000 - 920,493 = 79,507;$$

$$D_1 = C - E_1 = 2.919,03; \qquad C_2 = 1.000(1,028)^{-2} = 946,267;$$

$$E_2 = C_1 + C_2 = 1.866,76; \qquad D_2 = C - E_2 = 1.962,763;$$

$$C_3 = 1.000/1,028 = 972,762; \qquad I_3 = 1.000 - 972,762 = 27,238;$$

$$E_3 = C_1 + C_2 + C_3 = 2.839,522; \qquad D_3 = C - E_3 = 1.000,001.$$

Ora possiamo finalmente riempire l'intera tabella:

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	*105,62*	*0*	*105,62*	*3.839,523*	*0*
1	*1.000*	*920,493*	*79,507*	*2.919,03*	*920,493*
2	*1.000*	*946,267*	*53,733*	*1.962,763*	*1.866,76*
3	*1.000*	*972,762*	*27,238*	*1.000,001*	*2.839,522*
4	*1.000*	*0*	*0*	*0,001*	*3.839,522*

4.4 Ammortamento italiano

In questa forma di ammortamento, a differenza dei precedenti, le quote capitale sono tutte uguali fra loro, e valgono tutte $\frac{C}{n}$, mentre ogni quota interesse é calcolata moltiplicando per il tasso di remunerazione il debito residuo al periodo precedente. Le rate sono corrisposte posticipatamente, come nell'ammortamento francese, e di conseguenza, possiamo scrivere debito estinto e debito residuo in modo ricorsivo:

$$D_1 = C\left(1-\frac{1}{n}\right), \qquad E_1 = \frac{C}{n}, \cdots,$$

$$D_k = C\left(1 - \frac{k}{n}\right), \qquad E_k = \frac{kC}{n}, \cdots,$$

che vale per tutti i k da 1 a n. Dall'espressione suddetta di D_k, possiamo scrivere ricorsivamente anche gli I_k: $I_{k+1} = Ci\left(1 - \frac{k}{n}\right)$, per $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Un piano di ammortamento italiano si può schematizzare in una tabella come segue:

Anno	Rata	Q. capitale	Q. interesse	D. residuo	D. estinto
0	0	0	0	C	0
1	$(C/n)(1+ni)$	C/n	Ci	$C(1-1/n)$	C/n
...	...	...	...	...	...
$n-1$	$(C/n)(1+2i)$	C/n	$2(C/n)i$	C/n	$C - C/n$
n	$(C/n)(1+i)$	C/n	$(C/n)i$	0	C

Esercizio 78. ***Ricavare tutti i dati, e la relativa tabella di ammortamento, di un piano di rimborso di tipo italiano di 3 anni, al tasso di remunerazione dell'*****$1,7\%$*****, con quota capitale di*** **700** ***euro. Calcolare inoltre nuda proprietà e usufrutto all'inizio dell'ultimo anno ad un tasso di valutazione del*** **$2,2\%$.**

Inizialmente, calcoliamo l'ammontare totale del debito da ammortizzare. Essendo la quota capitale costante, ricaviamo semplicemente:

$$\frac{C}{3} = 700 \text{ euro} \implies C = 2.100 \text{ euro}.$$

Successivamente, calcoliamo le singole voci ad ogni passaggio:

1. *Al primo anno, avremo:*

   $I_1 = Ci = 2.100 \cdot (0,017) = 35,7$ *euro,*

   $D_1 = C - \frac{C}{n} = 2.100 - 700 = 1.400$ *euro,*

   $E_1 = C_1 = 700$ *euro.*

2. *Al secondo anno:*

   $I_2 = i \cdot D_1 = 23,8$ *euro,*

   $D_2 = C - \frac{2C}{n} = 700$ *euro,*

   $E_2 = \frac{2C}{n} = 1.400$ *euro.*

3. *All'ultimo anno, avremo:* $C_3 = 700$ *euro,* $I_3 = iD_2 = (0,017) \cdot 700 = 11,9$ *euro.*

Ed ecco la relativa tabella di ammortamento:

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	*0*	*0*	*0*	*2.100*	*0*
1	*735,7*	*700*	*35,7*	*1.400*	*700*
2	*723,8*	*700*	*23,8*	*700*	*1.400*
3	*711,9*	*700*	*11,9*	*0*	*2.100*

Concludiamo calcolando nuda proprietà e usufrutto:

$$NP(\mathcal{A}, 2, 0, 022) = C_3(1 + 0,022)^{2-3} = 684,931 \text{ euro.}$$

$$U(\mathcal{A}, 2, 0.022) = I_3(1 + 0,022)^{2-3} = 11,643 \text{ euro.}$$

Esercizio 79. ***Compilare il piano di rimborso di un prestito di 3.000 euro in 5 anni al tasso periodale annuo del*** **15%*, in regime di ammortamento italiano. Successivamente, determinarne l'indice di onerosità.***

Essendo l'ammontare C di 3.000 euro, ogni quota capitale risulta di 600 euro. Ripetendo le formule suddette ad ogni passaggio, la tabella di ammortamento é la seguente:

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	*0*	*0*	*0*	*3.000*	*0*
1	*1.050*	*600*	*450*	*2.400*	*600*
2	*960*	*600*	*360*	*1.800*	*1.200*
3	*870*	*600*	*270*	*1.200*	*1.800*
4	*780*	*600*	*180*	*600*	*2.400*
5	*690*	*600*	*90*	*0*	*3.000*

L'indice di onerosità risulta:

$$\gamma = \frac{450 + 360 + 270 + 180 + 90}{3.000} = 0,45.$$

Notare che l'indice di onerosità di un ammortamento italiano é sempre uguale al rapporto $i(n + 1)/2$. Infatti, riprendendo la scrittura generale dei debiti residui, ogni quota interesse può essere scritta come $I_{k+1} = Ci\left(1 - \frac{k}{n}\right)$, per $k = 0, \ldots, n-1$, per cui l'indice di onerosità risulta:

$$\gamma = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} Ci\left(1 - \frac{k}{n}\right)}{C} = i\sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = i\left[n - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k\right] =$$

$$= i\left[n - \frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\right] = i\left[n - \frac{n-1}{2}\right] = \frac{i(n+1)}{2}.$$

4.5 Altri casi di ammortamento

4.5.1 Preammortamento

Nell'ambito di una qualsiasi operazione di ammortamento, può essere previsto un periodo di cosiddetto **preammortamento**, consistente in un differimento di s anni della data di inizio del rimborso del debito. In questi s anni, viene rimborsata soltanto la quota interessi calcolata sull'ammontare complessivo del debito, ossia le prime s quote interessi saranno $I_k = i \cdot C$, per $k = 1, \ldots, s$. Dall'$(s+1)$-esimo anno in poi, si incomincerà il vero e proprio ammortamento pagando pure le quote capitale, calcolate secondo le modalità prestabilite. Ovviamente, negli anni di preammortamento, il debito residuo resta sempre uguale e coincidente con C e il debito estinto é nullo.

Un tipico caso di preammortamento (con periodicità mensile) avviene nel periodo che intercorre tra il rogito, cioè l'atto notarile di acquisto di una casa, e l'inizio del mutuo. Spesso il mutuo parte qualche mese dopo il rogito, e in quei mesi vengono pagate soltanto le quote interessi.

Esercizio 80. ***Compilare un piano di rimborso di 10.000 euro al tasso di remunerazione del*** 5% ***che preveda 2 anni di preammortamento e 3 di ammortamento italiano.***

Le quote interesse per i primi 2 anni di preammortamento saranno date da $I_1 = I_2 = 0,05 \cdot 10.000 = 500$ *euro. Per il resto, si segue esattamente il normale schema dell'ammortamento italiano a quote capitale costanti, di conseguenza avremo la tabella seguente (con 3 cifre di approssimazione):*

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	*0*	*0*	*0*	*10.000*	*0*
1	*0*	*500*	*500*	*10.000*	*0*
2	*0*	*500*	*500*	*10.000*	*0*
3	*3.833,333*	*3.333,333*	*500*	*6.666,666*	*3.333,333*
4	*3.666,666*	*3.333,333*	*333,333*	*3.333,333*	*6.666,666*
5	*3.499,999*	*3.333,333*	*166,666*	*0*	*9.999,999*

4.5.2 Ammortamento con periodicità frazionata

I casi di rimborso di un prestito in cui la periodicità delle rate di rimborso é diversa dall'anno non presentano novità sensibili rispetto alla casistica standard. In genere, le frazioni di anno considerate sono dei sottomultipli, e l'unica cosa a cui bisogna prestare attenzione é l'utilizzo dell'opportuno tasso equivalente a quello annuo. Di seguito, un esempio esplicativo con ammortamento francese.

Esercizio 81. ***Compilare la tabella di ammortamento per un piano di rimborso di 4.550 euro al tasso annuo dell'*** 8% ***in 4 rate semestrali costanti.***

Prima di tutto, calcoliamo il tasso semestrale i^* *equivalente al tasso annuo* $i = 0,08$ *con la formula di conversione:*

$$(1 + i_{1/2})^2 = 1 + i \implies i^* = i_{1/2} = \sqrt{1 + i} - 1 = \sqrt{1,08} - 1 = 0,039.$$

Quindi, la rata costante R *sarà uguale a :*

$$R = \frac{Ci^*}{1 - (1 + i^*)^{-n}} = \frac{4.550 \cdot 0,039}{1 - (1,039)^{-4}} = 1.250,527 \text{ euro.}$$

Usando la notazione standard, chiamiamo C_1*,* I_1*,* D_1 *ed* E_1 *i dati relativi alla prima rata, quella dopo 6 mesi, che risulteranno:*

$$C_1 = E_1 = R(1 - i^*)^{-n} = 1.250,527(1,039)^{-4} = 1.073,076 \text{ euro,}$$

$$I_1 = R - C_1 = 1.250,527 - 1.073,076 = 177,451 \text{ euro,}$$

$$D_1 = C - E_1 = 4.550 - 1.073,076 = 3.476,924 \text{ euro.}$$

Ora, seguendo il normale procedimento dell'ammortamento francese, compiliamo la tabella, ricordando di scrivere la periodicità corretta nella prima colonna:

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	*0*	*0*	*0*	*4.550*	*0*
6 mesi	*1.250,527*	*1.073,076*	*177,451*	*3.476,924*	*1.073,076*
1 anno	*1.250,527*	*1.114,927*	*135,6*	*2.361,997*	*2.188,003*
1 anno e 6 mesi	*1.250,527*	*1.158,414*	*92,117*	*1.203,587*	*3.346,413*
2 anni	*1.250,527*	*1.203,588*	*46,939*	*-0,001*	*4.550,001*

4.5.3 Ammortamento con cambiamento nelle condizioni di rimborso

Un caso piuttosto frequente nella realtà é quello in cui il rimborso non avvenga mediante un unico tasso annuo di interesse, ma, da una certa data in poi, ne venga utilizzato un altro. Ad esempio, nella compravendita di case, può verificarsi il caso di rinegoziazione del mutuo, dipendente da variazioni di tassi di mercato, o da qualche altro cambiamento nelle condizioni economiche del debitore, o per qualche altro motivo.

Di seguito, vediamo un esempio in cui alcune rate sono rimborsate ad un certo tasso e le successive ad un altro, senza snaturare il tipo di ammortamento.

Esercizio 82. ***Ricavare i dati del rimborso di un prestito di 2.000 euro con piano di ammortamento italiano in 4 rate annuali, le prime 2 da rimborsare al tasso di remunerazione del*** 4% ***e le successive due al tasso del*** $6,5\%$***.***

Ricaviamo inizialmente la quota capitale costante dell'ammortamento, che non dipende dal tasso scelto, e quindi si manterrà costante per tutta la durata dell'ammortamento:

$$C_i = \frac{C}{n} = \frac{2.000}{4} = 500 \text{ euro.}$$

Chiamando i due tassi $i_1 = 4/100$ *e* $i_2 = 65/1.000$*, le relative quote interessi dunque saranno rispettivamente:*

- *Al primo anno,* $I_1 = C \cdot i_1 = 2.000 \cdot 0,04 = 80$ *euro.*
- *Al secondo anno,* $I_2 = D_1 \cdot i_1 = 1.500 \cdot 0,04 = 60$ *euro.*
- *Al terzo anno,* $I_3 = D_2 \cdot i_2 = 1.000 \cdot 0,065 = 65$ *euro.*
- *Al quarto anno,* $I_4 = D_3 \cdot i_2 = 500 \cdot 0,065 = 32,5$ *euro.*

Da notare che, per effetto del cambiamento di tasso dopo il secondo anno, gli andamenti delle quote interessi e delle rate non sono strettamente decrescenti, come in tutti i casi visti precedentemente. La tabella risulta:

Anno	R_k	C_k	I_k	D_k	E_k
0	0	0	0	2.000	0
1	580	500	80	1.500	500
2	560	500	60	1.000	1.000
3	565	500	65	500	1.500
4	532,5	500	32,5	0	2.000

4.5.4 Cenni sull'ammortamento americano

Quest'ultimo caso é anche detto **ammortamento a due tassi**, e si costruisce essenzialmente su due ipotesi:

1) dalla prima alla $(n-1)$-esima scadenza il debitore rimborsa soltanto la quota interessi Ci secondo un tasso di remunerazione i, mentre alla scadenza del prestito restituisce oltre agli interessi l'intera somma prestata: $C(1+i)$;

2) contemporaneamente, il debitore versa anche, ad un altro soggetto, una rata ad ogni periodo, accumulando del denaro che, capitalizzato ad un **tasso di accumulazione** j, in generale diverso da i, genera la somma C da restituire alla scadenza del prestito.

Quindi, ogni rata totale versata dal debitore ammonta a:

$$R = \left(i + \frac{1}{s_{\overline{n}|j}} \right) C.$$

Al debitore conviene usare questo metodo se il tasso di accumulazione j é maggiore di quello di remunerazione i.

4.6 Valutazione dei prestiti

Torniamo brevemente a discutere della formula di valutazione del prestito ad un qualsiasi istante τ, scomposta nella somma di nuda proprietà e usufrutto:

$$A(\mathcal{A}, \tau, j) = NP(\mathcal{A}, \tau, j) + U(\mathcal{A}, \tau, j).$$

Consideriamo il caso più elementare: quello di un prestito rimborsabile a scadenza di un ammontare C, con pagamento annuo posticipato degli interessi, cioè con la quota interesse costante Ci. Se n é il numero delle rate, i il tasso di remunerazione e j il tasso di valutazione, la formula del valore attuale assume la forma:

$$A(\mathcal{A}, 0, j) = \sum_{k=1}^{n} Ci(1+j)^{-k} + C(1+j)^{-n}. \tag{4.6.1}$$

Se chiamiamo $K(\mathcal{A}, 0, j) = C(1+j)^{-n}$, sostituendo in (4.6.1) avremo la seguente relazione:

$$A(\mathcal{A}, 0, j) = K(\mathcal{A}, 0, j) + \frac{i}{j}(C - K(\mathcal{A}, 0, j)), \tag{4.6.2}$$

la nota **formula di Makeham**, laddove il primo addendo é la nuda proprietà, il secondo addendo rappresenta l'usufrutto.

Se poi h é un intero positivo non maggiore di n, quindi una scadenza qualsiasi del piano di rimborso, la (4.6.2) può essere generalizzata:

$$A(\mathcal{A}, h, j) = K(\mathcal{A}, h, j) + \frac{i}{j}(C - K(\mathcal{A}, h, j)),$$

laddove $K(\mathcal{A}, h, j) = C(1 + j)^{h-n}$.

Questa formula ingloba insieme i tassi di remunerazione e di valutazione, il valore attuale, l'ammontare complessivo del prestito e la nuda proprietà, quindi ognuno di questi valori può essere ricavato avendo tutti gli altri.

Esercizio 83. ***Dato un prestito rimborsabile a scadenza di ammontare*** $C = 1.000$ ***euro, che ad un istante*** h ***ha nuda proprietà uguale a 600 euro e valore 800 euro, remunerato al tasso del*** 5%***, calcolare il tasso di valutazione con la formula di Makeham.***

Ci basta applicare direttamente la formula, con j *tasso incognito e avremo:*

$$800 = 600 + \frac{5}{100j}(1.000 - 600) \iff 200j = 20 \iff j = 10\%.$$

Capitolo 5

Criteri di scelta in condizioni di certezza

L'idea alla base della scelta tra diversi investimenti, o operazioni finanziarie in senso lato, fa riferimento al caso di chi, disponendo di un determinato capitale, voglia decidere qual é il suo impiego migliore. Come nel resto di questa trattazione, restiamo nel caso deterministico, ossia consideriamo soltanto situazioni finanziarie in cui non ci sia alcun fenomeno casuale o stocastico che possa avvenire (choc sui tassi, crisi di Borsa, default di Stati, ecc.).

A questo scopo, ossia di valutare le operazioni finanziarie da eventualmente svolgere, ci servono dei criteri basati su dei valori numerici di riferimento. In particolare, definiremo il **risultato economico attualizzato**, il **saldo finanziario** e soprattutto il **tasso interno di rendimento** (comunemente noto come **tasso annuo effettivo globale o TAEG**).

5.1 Il Criterio del REA

Definizione 84. *Data una qualsiasi operazione finanziaria $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$, assumendo che l'istante iniziale per semplicità sia $t_1 = 0$ e scelto un tasso di valutazione j, il* ***Risultato Economico Attualizzato (REA)*** *dell'operazione corrisponde esattamente al suo valore attuale:*

$$REA(j, \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}) = A(0, \underline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{m} x_k (1+j)^{-t_k}. \tag{5.1.1}$$

L'espressione (5.1.1) rappresenta il valore attuale al tempo 0 del flusso di cassa (con importi positivi o negativi), valutato al tasso j. Il REA di un progetto (da notare che a volte viene anche definito **VAN**, o **Valore Attuale Netto**) dunque quantifica il valore attuale del guadagno che un determinato progetto permette di realizzare. Durante l'operazione finanziaria, si creano via via delle disponibilità, ossia dei capitali intermedi. Se poi si verifica il caso in cui le condizioni del mercato permettono l'impiego di queste disponibilità a quel tasso, si può anche ragionare in termini di montante, che ha anch'esso una denominazione specifica:

Definizione 85. *Data una qualsiasi operazione finanziaria $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$, assumendo che l'istante iniziale per semplicità sia $t_1 = 0$ e scelto un tasso di valutazione j, il* ***Saldo Finanziario (SF)*** *dell'operazione corrisponde esattamente al suo montante calcolato rispetto a quel tasso:*

$$SF(j, \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}) = M(t_m, \underline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{k=1}^{m} x_k(1+j)^{t_m - t_k} = REA(j, \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}})(1+j)^{t_m}. \quad (5.1.2)$$

Un criterio di scelta tra 2 o più possibili investimenti/finanziamenti, sempre soggetti comunque all'arbitrarietà del tasso di valutazione, suggerisce di scegliere quello il cui REA, a parità di tasso, sia maggiore. Date due operazioni finanziarie, se esiste un tasso di valutazione tale che i due REA relativi sono uguali, questo tasso é detto **tasso di svolta**, nel senso che un tasso superiore o inferiore a questo comporta un'inversione delle preferenze.

Esercizio 86. ***Consideriamo le due seguenti operazioni di investimento:***

$$\mathcal{I}_1 = \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-1.000,\ 400,\ 400,\ 500\}/\{0,\ 1,\ 2,\ 3\},$$

$$\mathcal{I}_2 = \underline{\boldsymbol{y}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-1.500,\ 500,\ 500,\ 800\}/\{0,\ 1,\ 2,\ 3\},$$

e supponiamo di valutarle al tasso annuo del 5%***. Quale delle due é preferibile in base al criterio del REA?***

Calcoliamo i due REA con la formula (5.1.1):

$$REA(5\%, \mathcal{I}_1) = -1.000 + 400(1,05)^{-1} + 400(1,05)^{-2} + 500(1,05)^{-3} =$$

$$= -1.000 + 380,952 + 362,811 + 431,918 = 175,681 \textit{ euro.}$$

$$REA(2,5\%, \mathcal{I}_2) = -1.500 + 500(1,05)^{-1} + 500(1,05)^{-2} + 800(1,05)^{-3} =$$

$$= -1.500 + 476,19 + 453,514 + 691,07 = 120,774 \textit{ euro.}$$

Quindi, essendo il REA di $\mathcal{I}_1$ maggiore di quello di $\mathcal{I}_2$, il primo investimento é da preferire al secondo.

Esercizio 87. ***Date le due seguenti operazioni finanziarie:***

$$\mathcal{O}_1 = \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-200,\ 600,\ 100\}/\{0,\ 1,\ 2\},$$

$$\mathcal{O}_2 = \underline{\boldsymbol{y}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-100,\ 500\}/\{0,\ 1\},$$

determinare il tasso di svolta in base a cui si inverte la preferenza. Calcolare successivamente il REA di entrambe le operazioni valutato al tasso di svolta e successivamente stabilire quale delle 2 operazioni é preferibile considerando rispettivamente i tassi di valutazione del 40% ***e del*** 70%***.***

Usando come incognita il tasso j, calcoliamo i REA delle 2 operazioni ed uguagliamoli:

$$REA(j, \mathcal{O}_1) = REA(j, \mathcal{O}_2) \iff$$

$$-200 + 600(1+j)^{-1} + 100(1+j)^{-2} = -100 + 500(1+j)^{-1},$$

e considerando la sostituzione $v := (1+j)^{-1}$, le soluzioni della relativa equazione di secondo grado sono:

$$v_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

di cui scartiamo chiaramente la radice negativa. Riportiamo invece quella positiva v^* in termini del tasso j^*, quindi:

$$v^* = \frac{1}{1+j^*} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \iff j^* = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} \simeq 61,8\%.$$

Il tasso di svolta (usurario, per la verità) trovato é del $61,8\%$. Calcoliamo il REA della seconda operazione (che é più semplice):

$$REA(61,8\%, \mathcal{O}_2) = -100 + 500(1,618)^{-1} = 209,023 \text{ euro.}$$

Poichè il tasso trovato é un tasso soglia tra la preferibilità delle due operazioni, calcoliamo prima il REA di $\mathcal{O}_1$ e di $\mathcal{O}_2$ col tasso del 40%:

$$REA(40\%, \mathcal{O}_1) = -200 + 600(1,4)^{-1} + 100(1,4)^{-2} = 279,591 \text{ euro.}$$

$$REA(40\%, \mathcal{O}_2) = -100 + 500(1,4)^{-1} = 257,142 \text{ euro.}$$

Quindi col tasso del 40% l'operazione $\mathcal{O}_1$ é da preferire a $\mathcal{O}_2$ perchè presenta un REA maggiore, e inoltre, essendo minore quel tasso del tasso di soglia in cui i REA sono uguali, possiamo concludere che al tasso del 70%, che supera il tasso j^* la situazione si inverte rispetto al caso del 40%, e quindi si preferisce $\mathcal{O}_2$ rispetto a $\mathcal{O}_1$.

Il criterio del REA presenta alcune debolezze innegabili, che la stessa esistenza del tasso di svolta mette in evidenza: la forte dipendenza dal tasso di valutazione scelto. Infatti, in condizioni di mercato soggette ad incertezza, in cui risulta parecchio difficile avere un'informazione completa, riesce improbabile prevedere di potere impiegare i capitali a un tasso sicuro. In particolare, quando questa valutazione va effettuata su un orizzonte temporale lungo. Nel seguito introdurremo un altro criterio generalmente considerato più significativo, anche se non sempre applicabile.

5.2 Il TIR

Cominciamo dalla definizione formale di TIR (in Inglese, IRR, *Internal Rate of Return*).

Definizione 88. *Data un'operazione finanziaria $\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}$, il suo* ***tasso interno di rendimento (TIR)*** *é un qualsiasi tasso i^* tale che il suo valore attuale (o il suo REA) sia uguale a 0:*

$$REA(i^*, \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}}) = \sum_{k=1}^{m} x_k(1+i^*)^{t_1-t_k} = 0. \tag{5.2.1}$$

Va notato il fatto che un'operazione potenzialmente può non ammettere alcun TIR, oppure anche ammetterne più di uno. Questo non deve stupire, visto il fatto che il TIR va ricavato come soluzione di un'equazione polinomiale, e quindi la cui determinazione esatta é in generale quasi impossibile, ma approssimabile mediante qualche metodo di quelli visti in precedenza (approssimazioni successive, tangenti di Newton...). Da notare il fatto che, quando non indicato in modo diverso, il TIR é un tasso annuo.

Esempio 89. *Schematizziamo brevemente il TIR nel caso di due ben noti Titoli di Stato, in versione semplificata, vale a dire senza spese di commissione e senza ritenute fiscali. Cominciamo dal BoT, che come abbiamo visto, si può modellizzare come un'operazione finanziaria di investimento su 2 date, del tipo*

$$\mathcal{B}_1 = \{x_0,\ x_1\}/\{t_0,\ t_1\} = \{-C_0,\ C_1\}/\{0,\ 1/4\}.$$

(In questo caso abbiamo descritto un BoT a 3 mesi, con C_0 prezzo di emissione e C_1 valore nominale). Detto i il tasso annuale, il valore attuale dell'investimento $\mathcal{B}_1$ é

$$A(0, \mathcal{B}_1) = -C_0 + C_1(1+i)^{-1/4},$$

che si annulla in:

$$i^* = \left(\frac{C_1}{C_0}\right)^4 - 1,$$

che é dunque il TIR dell'operazione. Il tasso trimestrale equivalente $i^*_{1/4}$ *si può calcolare con l'usuale uguaglianza tra tassi:*

$$i^*_{1/4} = (1+i^*)^{1/4} - 1 = \frac{C_1}{C_0} - 1.$$

Esempio 90. *Consideriamo ora invece un BTP a 3 anni, quotato alla pari, cioè col prezzo di acquisto* C *uguale al valore nominale, e di cedola annua* I*:*

$$\mathcal{B}_2 = \{-C,\ I,\ I,\ I,\ I,\ I,\ C+I\}/\{0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 5/2,\ 3\}.$$

Chiamiamo $i^* = i_{1/2}$ *il relativo tasso semestrale d'interesse. Il valore attuale in questo caso é dato dall'espressione:*

$$A(0,\mathcal{B}_2) = -C + I(1+i^*)^{-1} + I(1+i^*)^{-2} + I(1+i^*)^{-3} + I(1+i^*)^{-4} +$$

$$+I(1+i^*)^{-5} + (C+I)(1+i^*)^{-6} = I\frac{1-(1+i^*)^{-6}}{i^*} - C(1-(1+i^*)^{-6}) =$$

$$= (1-(1+i^*)^{-6})\left(\frac{I}{i^*} - C\right),$$

che si annulla solo per il valore

$$i^* = \frac{I}{C},$$

quindi il TIR di un BTP alla pari corrisponde al rapporto tra cedola fissa annuale e valore nominale.

Vanno fatte notare due cose: prima di tutto, nel linguaggio comune il rendimento, anche quello di cui si parla in relazione allo spread tra titoli di Stato, corrisponde al tasso di rendimento, cioè al TIR. Inoltre, come abbiamo visto qua i^* *é un tasso semestrale. La parola TIR di per sé non specifica la periodicità del tasso. Negli esempi successivi torneremo a indicare come TIR il tasso annuale.*

Esercizio 91. ***Dati i due ZCB (zero coupon bond) seguenti a 6 mesi, calcolarne i rispettivi tassi di rendimento e lo spread tra i due titoli:***

$$\mathcal{ZCB}_1 = \{-97.532,\ 100\}/\{0,\ 1/2\}.$$

$$\mathcal{ZCB}_2 = \{-96.111,\ 100\}/\{0,\ 1/2\}.$$

Calcoliamo separatamente i 2 TIR:

$$A(0, \mathcal{ZCB}_1) = -97,532 + 100(1+i)^{-1/2} = 0 \iff i_1 = \left(\frac{100}{97,532}\right)^2 - 1 = 5,12\%.$$

$$A(0, \mathcal{ZCB}_2) = -96,111 + 100(1+i)^{-1/2} = 0 \iff i_2 = \left(\frac{100}{96,111}\right)^2 - 1 = 8,25\%.$$

Di conseguenza lo spread tra $\mathcal{ZCB}_2$ e $\mathcal{ZCB}_1$ é di $8,25 - 5,12 = 3,13\%$, ossia 313 punti base.

Esercizio 92. ***Consideriamo la seguente operazione di finanziamento:***

$$\mathcal{F} = \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{100,\ -10,\ -10,\ -110\}/\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

Calcolare, se esiste, il TIR di questa operazione.

Usiamo la formula del REA mantenendo come incognita i^*:

$$REA(i^*, \mathcal{F}) = 100 + (-10)(1+i^*)^{-1} + (-10)(1+i^*)^{-2} + (-110)(1+i^*)^{-3} = 0,$$

e usando la consueta sostituzione $v = (1+i^*)^{-1}$ otteniamo l'equazione di terzo grado:

$$11v^3 + v^2 + v - 10 = 0.$$

Le equazioni di terzo grado sono risolubili con la complicata formula di Cardano-Ferrari-Tartaglia, chi é interessato può consultare Wikipedia:

$$http://it.wikipedia.org/wiki/Equazione_{d}i_{t}erzo_{g}rado,$$

ma quando possibile, é decisamente più comodo usare le note regole di fattorizzazione. In questo caso particolare, possiamo fare un piccolo trucco algebrico, e ottenere un raccoglimento a fattore parziale:

$$11v^3 + v^2 + v - 10 = 10v^3 + v^3 + v^2 + v - 10 = 10(v^3 - 1) + v(v^2 + v + 1) =$$

$$= 10(v-1)(v^2 + v + 1) + v(v^2 + v + 1) = [10(v-1) + v](v^2 + v + 1) =$$

$$= (11v - 10)(v^2 + v + 1) = 0.$$

Come sappiamo dall'Algebra letterale studiata alle Scuole Superiori, le equazioni fattorizzate hanno come soluzioni tutte le soluzioni dei singoli fattori. In questo caso, ne abbiamo uno di grado 1, che quindi ha sicuramente un'unica soluzione, ed uno di secondo. Guardiamo il fattore di grado 2, per cercarne gli zeri:

$$v^2 + v + 1 = 0 \qquad \iff \qquad v_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{den} \notin \mathbb{R},$$

vale a dire che le soluzioni non sono reali (bensì complesse coniugate), quindi possiamo trascurare questo fattore. Ovviamente, non occorreva nemmeno la formula degli zeri delle equazioni di secondo grado: il trinomio $v^2 + v + 1$ é sempre positivo perchè somma di 3 valori positivi, quindi non si azzera mai per $v \in (0, 1)$. Quindi solo il fattore $11v - 10$ ammette una soluzione reale, da cui otteniamo il TIR:

$$v = \frac{10}{11} \iff 1 + i^* = \frac{11}{10} \iff i^* = \frac{1}{10} = 10\%.$$

In altri casi, ad esempio quando lo scadenzario dell'operazione é più lungo, e di conseguenza il polinomio risulta di grado più alto, il calcolo del TIR diventa chiaramente molto più ostico, e bisogna utilizzare un metodo di approssimazione.

Esercizio 93. ***Calcolare, se esiste, il TIR della seguente operazione finanziaria, approssimandolo alla terza cifra decimale:***

$$\mathcal{O} = \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-100,\ 20,\ 30,\ 40,\ 50\}/\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}.$$

Scriviamo direttamente l'equazione nella variabile $v = (1 + i^*)^{-1}$, che rappresenta il fattore di sconto, da cui il problema si riduce alla determinazione di uno zero della funzione

$$F(v) = 50v^4 + 40v^3 + 30v^2 + 20v - 100 = 0.$$

Attenzione: meglio non semplificare gli zeri, anche se si tratta di un'equazione, altrimenti i valori di $F(v)$ risulteranno divisi per $10\ldots$ Applichiamo il metodo delle approssimazioni successive sull'intervallo $(0,\ 1)$.

Siccome $F(0) = -100$, $F(1) = 40$, calcoliamo $F\left(\frac{1}{2}\right) = -74{,}375$.

Consideriamo perciò l'intervallo $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$ e calcoliamo il valore di $F(v)$ nel suo punto medio $\frac{3}{4} = 0{,}75$: $F(0{,}75) = -35{,}429$. Successivamente, iterando il procedimento, con i numeri decimali, avremo:

$$F(0{,}875) = -3{,}425, \qquad F(0{,}9375) = 16{,}699;$$

$$F(0{,}90625) = 6{,}261, \qquad F(0{,}890625) = 1{,}326;$$

$$F(0{,}8828125) = -1{,}071, \qquad F(0{,}88671875) = 0{,}121;$$

A questo punto, sappiamo che sicuramente la soluzione sta tra 0,8828125 e 0,88671875, quindi abbiamo già 2 cifre sicure dopo la virgola. Dimezziamo ulteriormente l'intervallo per avere anche la terza:

$$F(0{,}884765625) = -0{,}476, \qquad F(0{,}8857421875) = -0{,}177,$$

$$F(0,88623046875) = -0,028,$$

quindi, fermandoci alla terza cifra decimale, il valore v^* in cui $F(v^*) = 0$ corrisponde a circa 0,886, vale a dire un tasso annuo

$$i^* = \frac{1}{v^*} - 1 = 12,86\%,$$

che é quindi il TIR dell'investimento $\mathcal{O}$.

5.2.1 Esistenza del TIR

Ma quando possiamo essere certi dell'esistenza (se non dell'unicità, che qui tralasciamo) del TIR di un'operazione finanziaria? Fondamentalmente, quando l'equazione polinomiale del REA nell'incognita v ammette una soluzione compresa tra 0 e 1, escludendo gli estremi dell'intervallo. Il risultato più noto e importante, dovuto a Carl J. Norstrøm nel 1972 (vedi [N]), che non dimostriamo, valido nei casi delle operazioni di investimento, é il seguente:

Teorema 94. *Data l'operazione finanziaria*

$$\mathcal{O} = \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{x_1, \ldots, x_m\}/\{t_1, \ldots, t_m\},$$

se valgono le seguenti ipotesi:

1. $x_1 < 0$,
2. $x_k > 0$ *per* $k = 2, \ldots, m$,
3. $x_1 + x_2 + \ldots + x_m > 0$,

allora $\mathcal{O}$ possiede TIR positivo.

Esercizio 95. ***Un'operazione finanziaria $\mathcal{I}_R$ consiste in un esborso iniziale di 150 euro, e di 3 rimborsi successivi annuali di entità rispettive R, $2R$, $7R - 50$ euro. Quanto deve valere almeno R affinchè questo investimento abbia TIR positivo? Successivamente, calcolare il TIR dell'operazione nel caso in cui $R = 50$ approssimandolo alla seconda cifra decimale.***

Per applicare il teorema di Norstrøm, che ci assicura l'esistenza del TIR, prima dobbiamo effettivamente verificare che $\mathcal{O}$ sia un investimento, e quindi, oltre alla condizione ovvia $R > 0$, dobbiamo imporre che anche l'ultima rata di rimborso risulti positiva, quindi

$$7R - 50 > 0 \iff R > \frac{50}{7}.$$

Inoltre, dobbiamo verificare l'ipotesi di positività della somma di tutti i termini dell'operazione:

$$-150 + R + 2R + (7R - 50) > 0 \iff 10R > 200 \iff R > 20 \text{ euro.}$$

Fissiamo ora $R = 50$ *e a questo punto l'investimento assume la forma:*

$$\mathcal{I}_{50} = \underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-150,\ 50,\ 100,\ 300\}/\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

Quindi per il calcolo del TIR dovremo risolvere l'equazione di terzo grado in v*:*

$$-150 + 50v + 100v^2 + 300v^3 = 0 \iff F(v) = 6v^3 + 2v^2 + v - 3 = 0.$$

Prima di tutto, notiamo che

$$F\left(\frac{1}{2}\right) = -1,25, \qquad F\left(\frac{3}{4}\right) = 1,40625,$$

di conseguenza possiamo applicare il metodo delle approssimazioni successive all'intervallo $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$*. Usando i numeri decimali, avremo:*

$$F(0,625) = -0,12890625, \qquad F(0,6875) = 0,58251953;$$

$$F(0,65625) = 0,21331787, \qquad F(0,640625) = 0,03890228;$$

$$F(0,6328125) = -0,04581928, \qquad F(0,63671875) = -0,00366389;$$

poichè la soluzione risulta compresa tra 0,63671875 e 0,640625, dimezziamo quest'intervallo e troveremo:

$$F(0,638671875) = 0,0175677,$$

e allora, approssimato a 2 cifre, $v^* = 0,63$*, quindi il TIR dell'operazione risulta*

$$i^* = \frac{1}{0,63} - 1 \sim 0,58.$$

5.2.2 Il criterio del TIR

Generalmente considerato più adeguato del criterio del REA, il criterio del TIR può essere riassunto come segue:

- Dati 2 progetti di investimento $\mathcal{I}_1$ e $\mathcal{I}_2$, rispettivamente dotati di TIR i_1^* e i_2^*, $\mathcal{I}_1$ é preferibile a $\mathcal{I}_2$ se i_1^* é maggiore di i_2^*;

- Dati 2 progetti di finanziamento $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, rispettivamente dotati di TIR i_1^* e i_2^*, $\mathcal{F}_1$ é preferibile a $\mathcal{F}_2$ se i_1^* é minore di i_2^*.

Del criterio del TIR esiste inoltre anche una variante che potremmo definire assoluta, nel senso che invece di confrontare 2 distinte operazioni, si può fissare un tasso benchmark (una sorta di pietra di paragone) rispetto a cui confrontare la propria operazione: un investimento é conveniente se il TIR é sopra il benchmark, un finanziamento lo é se il TIR é sotto.

Esercizio 96. ***Consideriamo le due seguenti operazioni di finanziamento:***

- $\mathcal{F}_1$***: si riceve un prestito di 800 euro al tempo iniziale e lo si rimborsa in 2 rate distinte, la prima che ammonta a 600 euro dopo un anno, e la seconda di 500 euro dopo 2 anni.***
- $\mathcal{F}_2$***: si ricevono in prestito inizialmente 700 euro, che vengono rimborsati in 3 rate, una di 300 euro alla fine del primo anno, una di 300 euro alla fine del secondo e una di 1.000 euro alla fine del terzo.***

Stabilire col criterio del TIR quale dei due finanziamenti é più conveniente.

Scriviamo le due operazioni in forma estesa:

$$\mathcal{F}_1 = \{800,\ -600,\ -500\}/\{0,\ 1,\ 2\},$$

$$\mathcal{F}_2 = \{700,\ -300,\ -300,\ -1.000\}/\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}.$$

Calcoliamo ora separatamente i due TIR, se esistono e sono unici.

Nel primo caso, avremo:

$$800 - 600v - 500v^2 = 0 \iff 5v^2 + 6v - 8 = 0 \iff$$

$$\iff v_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+40}}{5} = \frac{4}{5},$$

avendo scartato la soluzione negativa. Il TIR di $\mathcal{F}_1$ *é dunque:*

$$i_1^* = \frac{1}{0,8} - 1 = 0,25 = 25\%.$$

Per quanto riguarda $\mathcal{F}_2$*, avremo invece:*

$$700 - 300v - 300v^2 - 1.000v^3 = 0 \iff 10v^3 + 3v^2 + 3v - 7 = 0,$$

da cui, decomponendo:

$$7v^3+3v^3+3v^2+3v-7=7(v^3-1)+3v(v^2+v+1)=7(v-1)(v^2+v+1)+$$

$$+3v(v^2+v+1)=(v^2+v+1)[7(v-1)+3v]=(v^2+v+1)(10v-7)=0 \ \ per \ \ v^*=\frac{7}{10},$$

che implica il TIR $i_2^* = 3/7 = 42,85\%$.

Per il criterio del TIR applicato ai finanziamenti, $\mathcal{F}_1$ *é preferibile a* $\mathcal{F}_2$ *in quanto* $i_1^* < i_2^*$.

Il criterio del TIR é esattamente quello che inconsciamente applichiamo al momento di contrarre un mutuo per l'acquisto di una casa oppure un prestito per comprare un oggetto a rate.

Nonostante la sua importanza pratica, anche questo criterio ha qualche aspetto discutibile: sotto l'aspetto tecnico-matematico, esso potrebbe non esistere o non essere unico, mentre sotto l'aspetto applicativo, possiamo fare questa riflessione. Il TIR é quel tasso per cui i valori attuali delle entrate e delle uscite di un'operazione si equivalgono, quindi la sua esistenza rende essenzialmente uguali l'operazione finanziaria e un investimento degli importi a quel tasso al di fuori dell'operazione. Ma questo può essere fatto solo assumendo che per un certo periodo di tempo (anche per più anni) i capitali si possano investire sul mercato a quel tasso, e che quel tasso rimanga costante per tutto quel tempo. Oggettivamente, si tratta di una condizione poco realistica.

5.2.3 Il TAN e il TAEG

Due acronimi che abbiamo un pò tutti e tutte sentito nominare, e che istintivamente associamo all'idea di tassi d'interesse senza però spesso saperne formalmente il significato sono il **TAN (Tasso Annuo Nominale)** e il **TAEG (Tasso Annuo Effettivo Globale)**, che compaiono, per obbligo di legge, in riferimento a qualsiasi acquisto a rate. In particolare, il TAEG fu addirittura definito in una legge (D.M. 8/7/1991), ed é uno dei rarissimi casi in cui una formula matematica entra in campo giuridico, nel modo seguente: il tasso che rende uguale, su base annua, la somma del valore attuale di tutti gli importi che compongono il finanziamento erogato dal creditore alla somma del valore attuale di tutte le rate di rimborso. Il fatto importante che distingue i 2 tassi é che mentre nelle rate su cui é calcolato il TAEG sono effettivamente incluse tutte le spese aggiuntive del finanziamento (spese assicurative, notarili, costi attuativi e gestionali, e via dicendo), il TAN va calcolato al netto di tutti questi altri oneri.

Per questo motivo, la funzione valore attuale relativa al TAEG prende valori sempre maggiori di quella relativa al TAN, perciò vale sempre la relazione: TAEG $\geq$ TAN. A volte, addirittura, quando si parla di finanziamenti cosiddetti a tasso

0, si intende che il TAN sia appunto 0, ma non il TAEG, a parte alcuni casi di offerte stracciate, comunque molto rare.

Esercizio 97. ***La signora Assunta acquista un nuovo computer a 2.000 euro, da rimborsare con 2 rate annuali da 1.200 euro l'una. La prima rata sarà però gravata da ulteriori 50 euro per l'accensione del finanziamento e da 1,50 euro di bollettino postale, mentre per la seconda rata dovrà pagare soltanto il bollettino postale. Calcolare il TAN e il TAEG di questo finanziamento.***

Prima di tutto, calcoliamo il TAN, vale a dire il tasso relativo all'operazione senza considerare i costi aggiuntivi. Con la solita variabile accessoria $v = (1+i)^{-1}$*, avremo:*

$$2.000 - 1.200v - 1.200v^2 = 0 \iff 3v^2 + 3v - 5 = 0,$$

$$v_1^* = \frac{\sqrt{69}-3}{6} \iff TAN = \frac{9-\sqrt{69}}{\sqrt{69}-3} \simeq 0,13066238 = 13,06\%.$$

Successivamente, passiamo al calcolo del TAEG. Considerando pure gli oneri aggiuntivi, l'equazione da risolvere questa volta é la seguente:

$$2.000 - (1.251,5 \cdot v) - (1.201,5 \cdot v^2) = 0 \iff$$

$$v_2^* = \frac{-1.251,5 + \sqrt{(-1.251,5)^2 - 4 \cdot 1.201,5 \cdot (-2000)}}{2.403} \simeq 0,87053239,$$

da cui otterremo:

$$TAEG = \frac{1}{0,87053239} - 1 = 14,87\%.$$

5.3 L'epoca dei tassi negativi

Come sa bene chi ha seguito i mercati finanziari in questi anni, dall'impennata dei rendimenti (e degli spread) del 2011, uno degli obiettivi di politica monetaria é stato quello di 'rinormalizzare' la situazione, come nei primi anni dell'introduzione dell'Euro, in cui i differenziali di rendimento tra tassi erano molto bassi. In questo quadro, anche la BCE, alcuni anni dopo la FED, decide un programma di **Quantitative Easing(QE)**, cioé riacquisto di alcuni Titoli di Stato di vari Paesi, mese per mese. In questa fase, anche per effetto di altri fattori economici su scala mondiale (calo repentino del prezzo del petrolio, crisi di domanda aggregata dei Paesi del Sud Europa, ecc.), alcuni Paesi, tra cui l'Italia, entrano in un periodo di disinflazione/deflazione. Questo si riflette anche sui rendimenti delle obbligazioni governative di molti Paesi europei, anche i più impensabili: i tassi di rendimento, soprattutto dei Titoli a scadenza breve, entrano in territorio negativo. Cioè quello che fino a pochissimi anni prima accadeva soltanto ai solidissimi bond svizzeri, si estende a molti Paesi dell'Eurozona, Italia compresa.

In pratica, se un Titolo di Stato ha tasso di rendimento negativo, i sottoscrittori accettano una perdita sicura pur di acquistare il Titolo, come se si preferisse avere quel Titolo piuttosto che non investire alcun capitale. Dai dati del Ministero delle Finanze, nel 2014 il tasso nominale dei BoT annuali oscilla tra $0,27\%$ e $0,74\%$, mentre nel 2015 il tasso minimo é negativo: $-0,03\%$. Addirittura nel 2016 la forchetta é tutta in negativo: il tasso minimo é $-0,238\%$, quello massimo é $-0,032\%$. Da notare che il rendimento medio ponderato del Titolo é $-0,14\%$. Vediamo in un esempio, per semplificare non consideriamo le spese accessorie, qual é la scrittura di un BoT che rende il $-0,032\%$, fissando al solito il prezzo a 100:

$$BoT = \{-103.305, 100\} \,/\, \{0, 1\}\,,$$

che ha TIR $-0,032\%$ in quanto:

$$-103.305 + 100(1 + (-0,032))^{-1} = 0.$$

Per cui un sottoscrittore di questo Titolo é disposto a comprarlo per $3,305$ euro in più del suo valore nominale.

Addirittura, con il rendimento minimo si ha un BoT del genere:

$$BoT = \{-131.233, 100\} \,/\, \{0, 1\}\,,$$

che ha TIR uguale a $-0,238\%$.

Ma persino nelle scadenze più lunghe il 2016 ha visto tassi negativi, ad esempio il CTz da 2 anni. Sempre dal sito del Ministero (che consiglio di guardare nuovamente: $www.dt.mef.gov.it$), il rendimento medio ponderato nel 2016 é stato $-0,031\%$ (quindi superiore a quello del BoT annuale, anche se sono stati entrambi negativi). Un CTz che rendesse il $-0,031\%$ sarebbe scritto così:

$$CTz = \{-106.5, 100\} \,/\, \{0, 1\}\,,$$

in quanto

$$-106.5 + 100(1 - 0,031)^{-2} = 0.$$

Evitando di entrare troppo nei dettagli degli aspetti macroeconomici, il fatto é che deflazione, azzeramento o addirittura negativizzazione dei tassi, blocco degli adeguamenti/scatti dei salari e delle pensioni vanno di pari passo, grosso modo. Da notare anche il fatto che, forse proprio perché lo schiacciamento dei tassi é stato guidato dalla politica monetaria della BCE di Mario Draghi, il rating sovrano dell'Italia non é sensibilmente cambiato, anzi é ancora in via di peggioramento: come dire che la solvibilità é ora assicurata, anche grazie allo scudo BCE, ma molti altri aspetti del nostro Paese non sono migliorati (bassa crescita, bassa produttività, stock di debito, ecc.). Nel prossimo Capitolo, in cui verrà trattata la struttura dei tassi in un mercato finanziario, manterremo comunque l'ipotesi iniziale, in cui tutti i tassi sono sempre positivi.

Capitolo 6

Struttura per scadenza dei tassi d'interesse

Torniamo a parlare di titoli obbligazionari, ma questa volta dal punto di vista della loro collocazione all'interno di una logica economica di mercato. Nell'economia finanziaria assume una grande importanza, a livello di valutazione dei titoli, la struttura temporale considerata, e la dinamica dei prezzi che si evolve su di essa. Come spesso accade nelle formalizzazioni scientifiche, limiteremo la nostra analisi ad un mercato semplificato, ideale, in cui sono verificate in ogni istante delle ipotesi standard. All'interno di questo mercato, considereremo portafogli di zero coupon bond (ZCB, da ora in poi), quindi potremo pensarli come BoT o CTz, al fine di ricavarne una valutazione, basata sulla struttura dinamica dei tassi d'interesse, che tenga conto delle varie scadenze e delle varie quantità di titoli. Quello a cui ci riferiamo é il cosiddetto **mercato secondario**, mentre il mercato primario é proprio quello delle aste dei titoli.

6.1 Ipotesi fondamentali del mercato finanziario

Le assunzioni caratteristiche sul mercato in esame possono essere riassunte in questa lista (per una trattazione più completa, anche degli altri argomenti contenuti in questo Capitolo, vedi [M], capitoli 6, 7, 9):

- **Non frizionalità dei titoli:** questa ipotesi racchiude in sé l'**assenza di costi e di gravami fiscali sulle transazioni**, la **mancanza di limitazioni sulle quantità minime e massime di titoli vendibili**, l'**assenza di rischi di insolvenza (o default)**, e la possibilità per ogni agente di assumere sempre una posizione debitoria (short), ossia sono consentite le **short sales (o vendite allo scoperto)**; per vendita allo scoperto si intende vendita di un titolo che, al momento dell'accordo, non é ancora in possesso del debitore.

- **Competitività degli agenti:** gli agenti sul mercato sono razionali e quindi tendono a massimizzare il proprio profitto, in altri termini la loro funzione di utilità é crescente, e al tempo stesso sono **price taker**, cioè non possono influenzare il prezzo dei titoli con la loro attività.

- **Assenza di arbitraggi:** Gli agenti non possono effettuare manovre di arbitraggio, vale a dire, in questo contesto (il concetto é molto più articolato nella finanza più avanzata), non possono effettuare operazioni finanziarie nelle quali ci siano tutti importi positivi, o tutti nonnegativi con almeno uno di essi strettamente positivo. Gli anglosassoni, con il consueto pragmatismo, chiamano questo principio **'no free lunch'**: un qualsiasi agente non può soltanto arricchirsi e non pagare mai.

Nota 98. *Come sappiamo dall'attualità, i mercati reali sono estremamente più complessi. La possibilità degli agenti di giocare su più mercati finanziari (materie prime, oro, valute diverse, debito pubblico sovrano di vari stati del mondo, corporate bond) e di differenziare i propri investimenti rende l'assenza di arbitraggi un'ipotesi improbabile.*

In vari Paesi, soprattutto nelle fasi più difficili della crisi dal 2008 in poi, sono state prese misure di regolamentazione e di tassazione per arginare i fenomeni speculativi (la legge Dodd-Frank negli USA, la Tobin Tax in alcuni Paesi europei, la sospensione temporanea delle vendite allo scoperto, ecc.). Ad esempio, in Italia é la CONSOB che ha facoltà di sospendere le vendite allo scoperto alla Borsa di Milano. In ogni modo, la complessità dei prodotti finanziari e la difficoltà di porre dei paletti in un mercato globale ed estremamente interconnesso, rendono difficili e anche inutili interventi legislativi ad hoc.

Tornando al nostro modello di mercato finanziario, ossiamo anche dare dell'arbitraggio una definizione formale:

Definizione 99. *Dato il flusso di cassa*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{x_1, \ldots, x_m\}/\{t_1, \ldots, t_m\},$$

*diremo che é un **arbitraggio** se* $\forall\ i \in \{1, \ldots, m\}$, *o* $x_i = 0$, *o* $x_i > 0$, *e se esiste almeno un* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *tale che* $x_j > 0$.

Quindi, gli importi devono essere tutti nonnegativi, e almeno uno di essi positivo. La proprietà di consistenza che l'assenza di arbitraggi impone comporta l'impossibilità di realizzare profitti senza l'assunzione di alcun rischio.

6.2 Proprietà dei ZCB

Chiamiamo t l'istante corrente, e $s \geq t$ un qualunque istante successivo. Se per s intendiamo la data,o meglio ancora l'istante di scadenza di un ZCB, chiamiamo $v(t,s)$ il prezzo in t del ZCB unitario che scade in s, ossia che garantisce al tempo s il rimborso di 1 (unità di capitale). Come da definizione delle obbligazioni di questo tipo, non ci sono cedole intermedie. Ovviamente questa espressione del prezzo, in termini di fattore di attualizzazione in regime composto, é legata ad un tasso di interesse periodale i: $v(t,s) = (1+i)^{t-s}$, da cui alcune proprietà immediate seguono:

- $v(s,s) = 1$;
- $0 < v(t,s) < 1, \quad \text{per} \quad 0 \leq t < s.$

La struttura esponenziale dei prezzi, detto i il tasso di interesse, implica inoltre la **proprietà di decrescenza rispetto alla scadenza**; sinteticamente, dato un ZCB con scadenza s^* ma la cui compravendita sia permessa anche al tempo $\tilde{s} < s^*$, si ha:

$$v(t,s^*) = (1+i)^{t-s^*} < (1+i)^{t-\tilde{s}} = v(t,\tilde{s}).$$

Quindi il prezzo dello ZCB decresce all'allontanarsi della scadenza dall'istante iniziale. O anche, dati due ZCB con diverse scadenze, valutati allo stesso istante, precedente ad entrambe le scadenze, il prezzo di quello che scade prima é maggiore dell'altro.

Consideriamo ora un'estensione rilevante dei ZCB unitari, ossia quelli che alla scadenza s garantiscano il rimborso dell'ammontare x_s, non necessariamente uguale a 1, e indichiamone il prezzo in t, istante non successivo ad s, con il simbolo $A(t, x_s)$.

Essendo i titoli infinitamente divisibili, in un mercato in cui possono essere trattati sia i ZCB unitari che quelli non unitari, il possesso di una quantità x_s di ZCB con scadenza in s e prezzo $v(t,s)$ equivale al possesso di un unico ZCB il cui valore di rimborso alla scadenza é x_s, dunque vale la **proprietà di indipendenza dall'importo**:

$$A(t, x_s) = x_s v(t,s), \qquad \forall\ t \leq s.$$

Queste proprietà sono strettamente legate all'assenza di arbitraggi nel mercato, come vediamo nel seguente esempio.

Esempio 100. *Consideriamo uno scadenzario* $\{0,\ 1\}$ *e un mercato in cui vengono comprati e venduti sia ZCB unitari (di cui intendiamo il valore unitario, 1, come 1.000 euro) che non unitari.*

Supponiamo al tempo 0 di compiere 2 diverse azioni:

1. *acquistare un titolo che scade all'anno 1 il cui valore di rimborso é* $x_1 = 3.000$ *euro;*

2. *vendere allo scoperto 3 ZCB unitari che scadranno all'anno 1, e quindi andranno consegnati in quella data.*

Per la prima azione, il prezzo da pagare é $A(0, 3.000)$, *mentre per la seconda azione la vendita allo scoperto frutta il guadagno* $3 \cdot v(0, 1)$.

Alla seconda data, cioè in $t = 1$, *si incasserà il rimborso del titolo non unitario, quindi da* 3.000 *euro, ma si dovranno contemporaneamente consegnare i 3 ZCB, ognuno dei quali da* 1.000 *euro. Quindi, il bilancio dell'intera operazione risulterà:*

$$-A(0, 3.000) + 3v(0, 1) + 3.000 - 3 \cdot 1.000 = 3v(0, 1) - A(0, 3.000).$$

Ora, se questa quantità fosse positiva, avremmo compiuto una manovra di arbitraggio, cioè avremmo ottenuto un guadagno positivo in una situazione di totale copertura. Quindi la proprietà di indipendenza dall'importo, che implica $A(0, 3.000) = 3v(0, 1)$ *corrisponde all'impossibilità di compiere arbitraggi.*

Da notare, infine, che se l'ammontare ottenuto fosse negativo, anche questo potrebbe provocare un arbitraggio, semplicemente scambiando tutti i segni, vale a dire comprare anzichè vendere e viceversa.

Estendendo l'idea di ZCB non unitari ad un insieme di più titoli con differenti scadenze, possiamo comporre un portafoglio di titoli obbligazionari, e denotarli esattamente come le operazioni finanziarie, ossia una sequenza di importi, i valori di rimborso dei titoli, e uno scadenzario, con le date di scadenza di ciascuno di essi. Un portafoglio composto in questo modo può anche essere visto come un unico titolo obbligazionario che paghi l'importo x_k alla k-esima data di scadenza, e in questo caso il prezzo di un titolo del genere in t corrisponderà alla sommatoria, o combinazione lineare, dei prezzi dei singoli titoli, calcolati alla rispettiva data di scadenza e pesati con i loro rispettivi importi. In sintesi, il titolo $\underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{t}} = \{x_1, \ldots, x_m\}/\{t_1, \ldots, t_m\}$ avrà in t il prezzo:

$$A(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k).$$

Anche la proprietà di linearità alla base di questa formula é una conseguenza dell'assenza di arbitraggi, e una tipica spiegazione di questa formula é che, sotto le ipotesi di questo mercato, un titolo complesso é replicabile mediante la composizione di opportuni ZCB unitari. Poichè questo titolo complesso deriva da più titoli elementari, qui nasce la ben nota denominazione di **titolo derivato**.

6.3 Prezzi a pronti e prezzi a termine

I contratti a cui ci siamo riferiti finora sono contratti strutturati su due sole date, quella di accordo tra le parti per l'acquisto di un'obbligazione, e quindi dell'acquisto stesso, e quella di scadenza, in cui avviene materiamlente il rimborso di essa. Passiamo adesso a considerare contratti strutturati su tre date, cosiddetti **contratti a termine (o contratti forward)**, in cui le due parti si accordano alla data iniziale di scambiarsi un titolo che sarà consegnato in una data successiva, e la cui scadenza avverrà ad una data ancora successiva. Quindi l'acquisto, e il pagamento del prezzo del titolo, avviene alla data intermedia. Chiamiamo ancora t la prima data, t^* la data intermedia e s quella di scadenza.

Definizione 101. *Dato un ZCB di scadenza s la cui vendita é definita in t per consegna in t^*, il suo prezzo sarà indicato con $v(t, t^*, s)$, per $t \leq t^* \leq s$, e detto **prezzo a termine in t per consegna in t^***.*

Per marcare in modo più chiaro la differenza con il prezzo definito precedentemente, quando il contratto é strutturato solo sulle due date t ed s, chiameremo $v(t, s)$ **prezzo a pronti (o spot)**.

Intuitivamente, possiamo considerare il contratto a pronti come un caso particolare del contratto a termine, quando le prime due date sulle quali é strutturato vanno a coincidere, cioè quando la data di stipula é anche quella di consegna ($t = t^*$):

$$v(t, t, s) = v(t, s), \qquad\qquad \forall\ t \leq s.$$

In caso contrario, sempre intuitivamente, si può dedurre che il tempo di attesa tra la stipula e la consegna dello ZCB abbia un effetto sul prezzo dello ZCB stesso, in particolare che questo prezzo risulti maggiore, come in un servizio di prenotazione a pagamento, che comporta un costo aggiuntivo per il bene acquistato. Tra l'altro, questo fatto é coerente con il concetto alla base della proprietà di decrescenza rispetto alla scadenza, anche se qui la scadenza é la stessa: lo ZCB per cui intercorre più tempo tra la consegna e la scadenza ha un prezzo minore.

Il seguente risultato caratterizza completamente la relazione tra prezzi a pronti e prezzi a termine, come sempre sotto l'ipotesi di assenza di arbitraggi, ed é detto **Teorema dei prezzi impliciti**:

Teorema 102. *In un mercato privo di arbitraggio vale la seguente uguaglianza, ad ogni istante $t \leq t^* \leq s$:*

$$v(t, s) = v(t, t^*)v(t, t^*, s). \tag{6.3.1}$$

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che l'uguaglianza (6.3.1) non valga, ponendo ad esempio $v(t,s) > v(t,t^*)v(t,t^*,s)$ (al solito, omettiamo la dimostrazione quando la disuguaglianza ha il segno opposto, che é solo leggermente differente) e dimostriamo che sotto questa ipotesi si può sviluppare una strategia arbitraggista, che contraddirebbe l'ipotesi del teorema. Infatti, se:

1. al tempo iniziale, t, un investitore vende allo scoperto uno ZCB di valore unitario di rimborso per scadenza in s, guadagnandone il costo $v(t,s)$;

2. contemporaneamente, sempre in t, lo stesso investitore acquista a pronti una quantità di ZCB unitari scadenti al tempo t^*, in numero di $v(t,t^*,s)$, spendendo quindi $v(t,t^*,s)v(t,t^*)$;

3. infine, sempre in t, stipula un contratto a termine per consegna in t^* di uno ZCB unitario scadente al tempo s.

In conseguenza di questa strategia, alle due scadenze successive accadrà quanto segue:

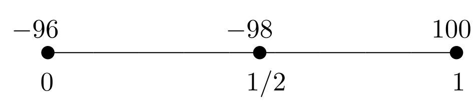
1. al tempo t^*, viene incassato il valore di rimborso dei ZCB unitari in scadenza in questa data, cioè $v(t,t^*,s)\cdot 1 = v(t,t^*,s)$. Sempre al tempo t^*, all'investitore viene consegnato lo ZCB il cui contratto a termine era stato stipulato in t, e quindi l'investitore ne paga il prezzo: $v(t,t^*,s)$;

2. alla scadenza s, ci sono 2 posizioni da chiudere: la prima é il rimborso del primissimo ZCB venduto allo scoperto, con cui l'investitore paga 1, mentre la seconda é l'incasso del valore di rimborso dello ZCB comprato a termine e consegnato in t^*, con cui l'investitore incassa 1.

In definitiva, il bilancio dell'intera strategia risulta:

$$v(t,s) - v(t,t^*,s)v(t,t^*) + v(t,t^*,s) - v(t,t^*,s) - 1 + 1 =$$
$$= v(t,s) - v(t,t^*,s)v(t,t^*) > 0,$$

per l'ipotesi iniziale, quindi il mercato ammette una strategia di arbitraggio, e l'ipotesi del teorema viene contraddetta. □



Qui $v(0,1) = 96$, $v(1/2,1) = 98$, valori di rimborso 100.

Esercizio 103. ***Dato un BoT il cui prezzo all'istante*** $t = 0$ ***é 950 euro e che garatisce un valore di rimborso di 1.000 euro dopo 6 mesi, e un altro BoT il cui prezzo in 0 é 980 euro che garantisce 1.000 euro dopo 3 mesi, calcolare il prezzo a termine dello stesso titolo per consegna a 3 mesi e scadenza a 6 mesi sotto l'ipotesi di assenza di arbitraggi.***

Dalle ipotesi descritte, si hanno i prezzi a pronti seguenti:

$$v(0, 1/2) = \frac{950}{1.000} = 0,95, \qquad v(0, 1/4) = \frac{980}{1.000} = 0,98,$$

quindi dal teorema dei prezzi impliciti dovrà risultare:

$$v(0, 1/4, 1/2) = \frac{v(0, 1/2)}{v(0, 1/4)} = \frac{0,95}{0,98} = 0,969387.$$

Ossia, letto in termini di assenza di arbitraggi, la quantità esatta di titoli unitari a 3 mesi da acquistare per coprirsi dalla vendita allo scoperto di un titolo a 6 mesi in questo mercato é 0,969387.

Dall'esercizio precedente, si nota piuttosto chiaramente che se consideriamo i prezzi come fattori di sconto esponenziale in regime composto, avremo diversi tassi d'interesse. Usando la stessa terminologia dei prezzi, definiremo **tassi a pronti (o spot)** quelli legati ai contratti a pronti e **tassi a termine (o forward)** quelli definiti nei contratti a termine.

In particolare, in regime esponenziale la relazione tra tassi sarà data da:

$$v(t, s) = (1 + i(t, s))^{t-s}, \qquad v(t, t^*) = (1 + i(t, t^*))^{t-t^*} \iff$$

$$\iff v(t, t^*, s) = \frac{(1 + i(t, s))^{t-s}}{(1 + i(t, t^*))^{t-t^*}},$$

e questo definirà il **tasso implicito del contratto a termine** $i^*(t, t^*, s)$:

$$i^*(t, t^*, s) = \left(\frac{1}{v(t, t^*, s)}\right)^{\frac{1}{s-t^*}} - 1 = \left(\frac{(1 + i(t, t^*))^{t-t^*}}{(1 + i(t, s))^{t-s}}\right)^{\frac{1}{s-t^*}} - 1. \qquad (6.3.2)$$

Applicando la formula (6.3.2) all'esercizio 88, calcoliamo il relativo tasso implicito:

$$i^*(0, 1/4, 1/2) = \left(\frac{1}{0,969387}\right)^{\frac{1}{1/2-1/4}} - 1 = 0,132429 = 13,2429\%.$$

Le proprietà dei prezzi a pronti sono abbastanza facilmente deducibili dalla relazione (6.3.1): positività, decrescenza rispetto alla scadenza, eccetera.

A volte si utilizza anche la cosiddetta **struttura delle intensità dei rendimenti a scadenza**, passando ai logaritmi:

$$h(t, t^*, s) = \log[1 + i^*(t, t^*, s)], \qquad t \leq t^* \leq s.$$

Il seguente esercizio esemplifica il calcolo di una struttura dei prezzi e dei tassi a pronti in un mercato in cui sono osservati i prezzi di diverse quantità di ZCB.

Esercizio 104. ***Determinare le strutture dei prezzi e dei tassi a pronti in un mercato strutturato su 4 anni, i cui prezzi osservati in*** $t = 0$ ***anno per anno risultano (in euro):***

$$A(0, x_1) = 80, \qquad A(0, x_2) = 75, \qquad A(0, x_3) = 100, \qquad A(0, x_4) = 90,$$

con le seguenti quantità di ZCB:

$$x_1 = 85, \qquad x_2 = 90, \qquad x_3 = 110, \qquad x_4 = 95.$$

La struttura dei prezzi a pronti viene facilmente ottenuta dall'applicazione della proprietà dell'indipendenza dall'importo, ossia:

$$v(0, k) = \frac{A(0, x_k)}{x_k},$$

per $k = 1, 2, 3, 4$, *quindi:*

$$v(0,1) = \frac{80}{85} = 0,941176, \qquad v(0,2) = \frac{75}{90} = 0,833333,$$

$$v(0,3) = \frac{100}{110} = 0,909090, \qquad v(0,4) = \frac{90}{95} = 0,947368,$$

e di conseguenza la struttura dei tassi spot é data da:

$$i(0,1) = \frac{1}{0,941176} - 1 = 0,0625 \sim 6,25\%,$$

$$i(0,2) = \left(\frac{1}{0,833333}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,095445 \sim 9,54\%,$$

$$i(0,3) = \left(\frac{1}{0,909090}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,032280 \sim 3,22\%,$$

$$i(0,4) = \left(\frac{1}{0,947368}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,013608 \sim 1,36\%.$$

Se poi si vuole ottenere la struttura dei tassi impliciti forward, ci é sufficiente applicare più volte la formula (6.3.2), prendendo $t = 0$ *e* t^* *ed* s *uguali a due qualsiasi scadenze successive.*

Esempio 105. *Nel linguaggio corrente, anche senza molte competenze finanziarie, si parla spesso di speculazione. Vediamo come potrebbe configurarsi un semplice caso di speculazione tramite l'uso di contratti spot e forward. Supponiamo che ci siano 2 traders, Piercarlo e Mario; Piercarlo vende a Mario un BoT con consegna 6 mesi dopo e scadenza ad un anno a un prezzo prefissato A_1, concordando con la controparte di ricomprarlo a pronti immediatamente dopo 6 mesi. Nel frattempo, i tassi di mercato si muovono e dopo 6 mesi, Piercarlo riacquisterà il titolo venduto. Se nel frattempo il prezzo di mercato A_2 sarà maggiore di A_1, cioè i tassi si saranno abbassati, Piercarlo pagherà a Mario la differenza $A_2 - A_1$, altrimenti viceversa. Ma se nel periodo successivo i tassi si abbasseranno ulteriormente, Piercarlo potrà di nuovo vendere il titolo, il cui prezzo sarà ulteriormente cresciuto. Un'ondata di speculazione si verifica quando un grande massa di investitori realizza contemporaneamente delle compravendite di questo tipo, o anche ben più complesse. Naturalmente, l'andamento dei tassi non può essere determinato con assoluta certezza, ma soltanto previsto. Quello che accade praticamente sempre in tutti i mercati finanziari é che i tassi, e quindi i valori dei titoli, cambiano continuamente, e questo rende le manovre di arbitraggio possibili nella realtà.*

6.3.1 Struttura dei tassi e quotazione di un titolo

Come possiamo legare la quotazione di un titolo alla sua struttura dei prezzi o dei tassi? Nell'esempio-guida seguente considereremo un generico titolo con cedole costanti (ad esempio un BTp) e ne confronteremo il prezzo dato dalla struttura di mercato in vigore con quello di emissione, ricordando il concetto di quotazione sopra e sotto la pari.

Esempio 106. *Al tempo $t = 0$, consideriamo un titolo con cedole costanti che garantisce il seguente flusso di pagamenti annuali:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{5,\ 5,\ 5,\ 5,\ 105\}/\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}.$$

Supponiamo che nel mercato sia in vigore una struttura istantanea dei rendimenti della forma

$$h(0,k) = \frac{k}{10},$$

e quindi le strutture dei tassi e dei prezzi ad essa associate sono rispettivamente:

$$i(0,k) = e^{\frac{k}{10}} - 1, \qquad\qquad v(0,k) = e^{-\frac{k^2}{10}}.$$

Il prezzo dell'obbligazione, calcolato in base a questa struttura, risulta:

$$\mathcal{P} = 5\left[e^{-\frac{1}{10}} + e^{-\frac{4}{10}} + e^{-\frac{9}{10}} + e^{-\frac{16}{10}}\right] + 105e^{-\frac{25}{10}} = 19,53693$$

euro, e dunque é quotato sotto la pari, in quanto

$$19,53693 = \mathcal{P} < C = 100.$$

Analizzando le caratteristiche del titolo, si nota facilmente che il suo tasso cedolare é del 5%*, mentre il TIR (la cui esistenza risulta assicurata dal Teorema 88)* i^* *si può calcolare applicando il metodo delle approssimazioni successive per determinare una radice dell'equazione:*

$$5v+5v^2+5v^3+5v^4+105v^5 = 19,53693 \iff 21v^5+v^4+v^3+v^2+v-3,907386 = 0,$$

da cui si ricava che $v^* \sim 0,65$*, e quindi* $i^* \sim 53,84\%$ *(spropositatamente alto).*

Dall'ultimo esempio, possiamo notare un interessante effetto:

- quando un titolo con cedole é quotato sotto la pari, il suo TIR é maggiore del suo tasso cedolare;
- quando invece é quotato sopra la pari, il suo TIR é minore del suo tasso cedolare.

Definizione 107. *Si definisce* ***tasso di parità (o par yield)*** *il tasso cedolare* i_P *di un titolo obbligazionario a cedola fissa che, valutato in base alla struttura per scadenza in vigore al tempo* t*, quota il titolo alla pari.*

Chiaramente, il tasso di parità é uguale al TIR del flusso relativo, quindi per calcolarlo possiamo usare la stessa tecnica.

Esercizio 108. ***Dato il BTp a 3 anni di valore di rimborso 100 euro, determinare la cedola semestrale e il tasso di parità se la struttura di rendimento a scadenza in vigore sul mercato é data da***

$$i(0,k) = e^{\frac{k}{100}} - 1.$$

Chiamiamo I *la cedola semestrale da calcolare, e* $\mathcal{P}$ *il prezzo di emissione del titolo; considerando anche l'istante* $t = 0$*, l'operazione finanziaria associata può essere espressa come segue:*

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{-\mathcal{P},\ I,\ I,\ I,\ I,\ I,\ 100+I\}/\{0,\ 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2,\ 5/2,\ 3\}.$$

Se calcoliamo il valore attuale delle poste in entrata del flusso usando la struttura data, corrispondente ai prezzi $v(0,k) = e^{-\frac{k^2}{100}}$*, lasiando indicata la cedola* I*, avremo:*

$$I\left[e^{-\frac{1}{400}} + e^{-\frac{1}{100}} + e^{-\frac{9}{400}} + e^{-\frac{1}{25}} + e^{-\frac{25}{400}}\right] +$$

$$+(100+I)e^{-\frac{9}{100}} = 100 \iff I = 1,489228$$

euro. Quindi I é la cedola semestrale richiesta e inoltre contemporaneamente abbiamo anche determinato il tasso di parità, appunto $i_P = 1,489228\%$.

In sintesi, abbiamo costruito un titolo quotato alla pari, ossia con prezzo di emissione pari a prezzo di rimborso, secondo una struttura dei rendimenti data dal mercato. Il bond ottenuto ha prezzo di emissione 100 euro, paga 5 cedole semestrali di 1,489228 e allo scadere dei 3 anni ha un valore di rimborso di 101,489228 euro.

Le informazioni sui tassi d'interesse del mercato, o almeno di un mercato sotto le ipotesi che abbiamo descritto, sono contenute all'interno di una cosiddetta struttura dei tassi, che affronteremo nel prossimo paragrafo.

6.4 La determinazione della struttura per scadenza

Consideriamo il problema della misurazione della struttura per scadenza dei tassi di interesse come problema di algebra lineare standard.

Supponiamo che al tempo t siano trattati (e, comunque, osservabili) sul mercato n titoli obbligazionari, non necessariamente a cedola nulla. Indichiamo con $\mathbf{t} = \{t_1, \ldots, t_m\}$ lo scadenzario comune a tutti i titoli, ottenuto come insieme unione degli n scadenzari caratteristici dei singoli titoli. Indichiamo inoltre con

$$\mathbf{x}_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{im}\}$$

il flusso di pagamenti generati dall'i-esimo titolo. Nelle date dello scadenzario totale $\mathbf{t}$ in cui il titolo i-esimo non emette pagamenti, il valore che viene immesso é 0. Chiamiamo ora $A_i = A(t, \mathbf{x}_i)$, per $i = 1, \ldots, n$, il prezzo del titolo i-esimo osservato sul mercato al tempo t.

Il problema che ci si pone é quello di determinare gli m prezzi (o fattori di sconto):

$$v(t, t_k) := v_k \quad \text{tali che} \quad A_i = A(t, \mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} v_j, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Detti rispettivamente $\mathbf{A}$ e $\mathbf{v}$ i vettori:

$$\mathbf{A} =^t (A_1, \ldots, A_n), \quad \mathbf{v} =^t (v_1, \ldots, v_m),$$

e con $\mathbf{X}$ la matrice dei pagamenti, di n righe, corrispondenti ai titoli, ed m colonne, corrispondenti alle scadenze:

$$\mathbf{X} = (x_{ij}), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

abbiamo un sistema lineare di n equazioni in m incognite, che in forma matriciale assume la forma:

$$\mathbf{X}\mathbf{v} = \mathbf{A}.$$

Il rango della matrice, $\text{rank}(\mathbf{X})$ individua il massimo numero di flussi di pagamenti linearmente indipendenti tra loro. Invece, la differenza $n - \text{rank}(\mathbf{X})$ indica il numero di titoli che possono essere considerati ridondanti, ossia il cui flusso si può ottenere tramite una combinazione lineare di flussi di altri titoli.

Possono verificarsi diverse situazioni, in base al tipo di sistema che abbiamo ed in base al numero delle sue soluzioni, ben noto grazie al Teorema di Kronecker-Rouchè-Capelli.

La presenza di titoli ridondanti, quindi ottenibili come portafogli costruiti con gli altri titoli, può dare luogo ad una situazione in cui, se uno dei titoli é mal prezzato, ossia se la sua quotazione non coincide con la combinazione lineare delle quotazioni dei titoli che ne costituiscono il portafoglio, il sistema di equazioni risulta incompatibile. Questo significa che non esiste un sistema di prezzi di titoli a cedola nulla unitari che possa soddisfare tutte le ipotesi del mercato, e questo potrebbe portare ad una violazione del principio di arbitraggio.

Invece, nel caso in cui un titolo ridondante sia ben prezzato, allora l'equazione associata non produce alcuna violazione delle proprietà del mercato, ma non aggiunge alcuna condizione nella determinazione della struttura di prezzi, ossia non contribuisce in alcun modo al sistema, come nei casi di sistemi indeterminati, cioè con infinite soluzioni.

Assumiamo che in ogni caso $n \leq m$, perchè in caso contrario ci sarebbe la certezza di avere $n - m$ titoli ridondanti. Però anche in questo caso, specialmente se $m > n$, il sistema é indeterminato, ed é perciò possibile scegliere arbitrariamente ∞^{m-n} diverse strutture per scadenza che non violano il principio di arbitraggio. Invece, l'ipotesi che la soluzione del sistema coincide con quella di completezza del mercato, che richiede che il numero dei titoli non ridondanti sia uguale al numero di date sullo scadenzario $\mathbf{t}$.

Esempio 109. *Calcoliamo la struttura per scadenza dei tassi d'interesse, a pronti e a termine, in un mercato in cui al tempo $t = 0$ siano trattati quattro titoli obbligazionari, caratterizzati dai flussi seguenti:*

titolo 1: $\{8,\ 8,\ 8,\ 108\}/\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$,
titolo 2: $\{5,\ 5,\ 105\}/\{1,\ 2,\ 3\}$,
titolo 3: $\{5,\ 105\}/\{1,\ 2\}$,
titolo 4: $\{100\}/\{1\}$,

ai prezzi:

$$A_1 = 98 \text{ euro}, \quad A_2 = 97 \text{ euro}, \quad A_3 = 95 \quad \text{euro}, \quad A_4 = 93 \text{ euro}.$$

Lo scadenzario comune é quindi $\boldsymbol{t} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, *con tempi espressi in anni, e i flussi dei titoli, ridefiniti sullo scadenzario comune, sono i seguenti:*

$$\boldsymbol{x}_1 = \{8,\ 8,\ 8,\ 108\}, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \{5,\ 5,\ 105,\ 0\},$$

$$\boldsymbol{x}_3 = \{5,\ 105,\ 0,\ 0\}, \qquad \boldsymbol{x}_4 = \{100,\ 0,\ 0,\ 0\},$$

da cui, la matrice 4×4 *assume la forma:*

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 108 \\ 5 & 5 & 105 & 0 \\ 5 & 105 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

di conseguenza il sistema lineare associato diventa:

$$\boldsymbol{Xv} = \boldsymbol{A} \implies \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 108 \\ 5 & 5 & 105 & 0 \\ 5 & 105 & 0 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 \\ 97 \\ 95 \\ 93 \end{pmatrix} \implies$$

$$\begin{cases} 8v_1 + 8v_2 + 8v_3 + 108v_4 = 98 \\ 5v_1 + 5v_2 + 105v_3 = 97 \\ 5v_1 + 105v_2 = 95 \\ 100v_1 = 93 \end{cases}.$$

Questo sistema ammette un'unica soluzione in quanto

$$\det(\boldsymbol{X}) = (-108) \cdot 105 \cdot (-105) \cdot 100 \neq 0 \iff rank(\boldsymbol{X}) = 4.$$

Le soluzioni sono facilmente calcolabili:

$$v_1 = 0,93, \qquad v_2 = 0,860476, \qquad v_3 = 0,838548, \qquad v_4 = 0,712664.$$

La struttura dei tassi a pronti si ricava dalle relazioni:

$$i_j = \left(\frac{1}{v_j}\right)^{\frac{i}{j}} - 1, \quad j = 1,2,3,4,$$

quindi

$$i_1 = \frac{1}{0,93} - 1 = 0,075268 \sim 7,52\%,$$

$$i_2 = \left(\frac{1}{0,860476}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 = 0,078029 \sim 7,8\%,$$

$$i_3 = \left(\frac{1}{0,838548}\right)^{\frac{1}{3}} - 1 = 0,060451 \sim 6,04\%,$$

$$i_4 = \left(\frac{1}{0,712664}\right)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,088375 \sim 8,83\%.$$

Per quanto riguarda invece la struttura dei prezzi a termine, la formula da utilizzare per i prezzi é data ancora dalla (6.3.1):

$$v(0,k,k+1) = \frac{v(0,k+1)}{v(0,k)} = \frac{v_{k+1}}{v_k}, \qquad k = 1,2,3. \tag{6.4.1}$$

Applicando (6.4.1), avremo i seguenti:

$$v(0,1,2) = \frac{v(0,2)}{v(0,1)} = \frac{0,860476}{0,93} = 0,925243;$$

$$v(0,2,3) = \frac{v(0,3)}{v(0,2)} = \frac{0,838548}{0,860476} = 0,974516;$$

$$v(0,3,4) = \frac{v(0,4)}{v(0,3)} = \frac{0,712664}{0,838548} = 0,849878.$$

Infine, la struttura dei tassi impliciti risulta dall'applicazione di (6.3.2):

$$i(0,1,2) = \frac{1}{0,925243} - 1 = 0,080797 \sim 8,07\%;$$

$$i(0,2,3) = \frac{1}{0,974516} - 1 = 0,02615 \sim 2,61\%;$$

$$i(0,3,4) = \frac{1}{0,849878} - 1 = 0,176639 \sim 17,66\%.$$

Capitolo 7

Principi di immunizzazione finanziaria

L'idea alla base dell'**immunizzazione finanziaria**, o anche della cosiddetta copertura, nasce dall'esigenza di possedere, in qualsiasi istante durante un'operazione finanziaria, una quantità di capitale sufficiente a far fronte a eventuali necessità. In ambito finanziario, immunizzarsi nei confronti di vari rischi (di tasso, ecc.) significa ad esempio costruire dei portafogli di copertura, che siano possibilmente privi di rischio. In ambito attuariale le compagnie assicurative che stipulino dei contratti di assicurazione devono accantonare la cosiddetta riserva matematica, ossia un ammontare che copra tutte le possibili spese aleatorie e che sia disponibile in ogni istante di tempo.

Qui ci occuperemo soltanto dell'immunizzazione delle operazioni finanziarie già trattate in precedenza, ed enunceremo qualche risultato standard della teoria dell'immunizzazione, nei casi ad una o più uscite. Per ulteriori dettagli ed esempi, si consiglia [S1].

7.1 Indici temporali di un flusso di pagamenti

Consideriamo nuovamente una generica operazione finanziaria

$$\underline{\mathbf{x}}/\underline{\mathbf{t}} = \{x_1, \ldots, x_m\}/\{t_1, \ldots, t_m\}.$$

A volte risulta utile usare degli indici sintetici che riassumano certe caratteristiche specifiche del flusso finanziario.

Definizione 110. *Si definisce* ***scadenza*** *(o* ***maturity****) il tempo t_m, e* ***vita a scadenza*** *(o* ***time to maturity****) al tempo t la vita residua, cioè la differenza $t_m - t$.*

Definizione 111. *Si definisce* ***scadenza media aritmetica*** $\bar{t}$ *la media delle scadenze pesate con le poste del flusso, assumendo che siano tutte non negative, vale a dire:*

$$\bar{t} := \frac{\sum_{k=1}^{m} x_k(t - t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k};$$

$\bar{t}$ rappresenta, fisicamente parlando, la distanza dall'istante t del baricentro della distribuzione delle masse $m_k := x_k / \sum_{j=1}^{m} x_j$ sull'asse dei tempi.

7.2 La durata media finanziaria

Se fissiamo un tasso di valutazione j e quindi un regime a interessi composti con fattore di attualizzazione $v(t, t_k) = (1 + j)^{t - t_k}$, possiamo definire un importante indice sintetico che tiene conto della struttura dei prezzi a pronti in vigore sul mercato:

Definizione 112. *Si definisce* ***durata media finanziaria*** *(o* ***duration*** *o* ***duration di Macaulay****) al tempo t la seguente quantità:*

$$D(t, \underline{\boldsymbol{x}}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t - t_k) x_k v(t, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k)}. \tag{7.2.1}$$

Ricordando la proprietà di linearità dei prezzi e la relazioni tra prezzi dei titoli a cedola nulla unitari e non unitari:

$$A(t, x_s) = x_s \cdot v(t, s), \qquad\qquad A(t, \underline{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^{m} x_k v(t, t_k),$$

possiamo esprimere la durata media finanziaria come segue:

$$D(t, \underline{\mathbf{x}}) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t - t_k) V(t, x_k)}{V(t, \underline{\mathbf{x}})}.$$

$D(t, \underline{\mathbf{x}})$ rappresenta la media aritmetica delle vite a scadenza, questa volta però pesata con i valori attuali delle poste del flusso calcolati secondo la struttura a scadenza in vigore il mercato al tempo t.

Ovviamente, vale la catena di disuguaglianze:

$$t_1 - t \leq D(t, \underline{\mathbf{x}}) \leq t_m - t,$$

con le uguaglianze che valgono soltanto se l'unica posta non nulla del flusso é x_1 al tempo t_1 oppure x_m al tempo t_m.

La duration é talvolta anche detta **tempo ottimo di smobilizzo**, in riferimento al fatto, per il Teorema di Fisher-Weil che successivamente vedremo, che indica l'istante in cui il proprio portafoglio é immunizzato e quindi conviene smobilizzare il proprio investimento. Il concetto di smobilizzo viene variamente usato in Economia e in Finanza per denotare le operazioni di cessione crediti per ottenere liquidità immediata.

Esempio 113. *Ricordando la relazione data dalla struttura dei tassi a pronti:*

$$i(t,s) = \left[\frac{1}{v(t,s)}\right]^{\frac{1}{s-t}} - 1,$$

consideriamo in $t = 0$ una struttura delle intensità di rendimento a scadenza del tipo:

$$h(t, t+\tau) = \frac{1}{\tau}\log(v(t, t+\tau)) = 0,05\tau;$$

dato il flusso

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{10,\ 20,\ 30\}/\{1,\ 2.5,\ 3.3\},$$

la scadenza media aritmetica é data da:

$$\bar{t} = \frac{10\cdot 1 + 20\cdot 2,5 + 30\cdot 3,3}{10+20+30} = 2,65 \ \textit{anni},$$

vale a dire 2 anni, 7 mesi e 24 giorni, in termini di anno commerciale. La durata media finanziaria valutata all'istante iniziale va invece calcolata dopo aver ricavato preliminarmente la struttura dei prezzi a pronti:

$$v(t,s) = e^{-h(t,s)(s-t)} \implies v(t,t+\tau) = e^{-h(t,t+\tau)\tau} = e^{-0,05\tau^2};$$

allora possiamo facilmente calcolare:

$$v(0,1) = e^{-0,05} = 0,9512;$$

$$v(0,2.5) = e^{-0,05\cdot(2,5)^2} = 0,7316;$$

$$v(0,3.3) = e^{-0,05\cdot(3,3)^2} = 0,581.$$

Allora

$$A(0,\underline{\boldsymbol{x}}) = x_1 v(0,1) + x_2 v(0,2.5) + x_3 v(0,3.3) = 41,547 \ \textit{euro},$$

e allora la durata media finanziaria al tempo 0 risulta:

$$D(0,\underline{\boldsymbol{x}}) = \frac{1\cdot 10\cdot v(0,1) + 2,5\cdot 20\cdot v(0,2.5) + 3,3\cdot 30\cdot v(0,3.3)}{41,547} =$$

$$= 2,492 \ \textit{anni} = 2 \ \textit{anni}, \ 5 \ \textit{mesi}, \ 27 \ \textit{giorni}.$$

Risulta ancora più semplice il calcolo della durata media finanziaria quando abbiamo un tasso di valutazione fissato e non abbiamo quindi bisogno di calcolare la struttura dei prezzi a pronti, come nel seguente caso.

Esercizio 114. ***Calcolare la scadenza media aritmetica e la durata media finanziaria del flusso***

$$\underline{\boldsymbol{x}}/\underline{\boldsymbol{t}} = \{1.000,\ 2.000,\ 3.500,\ 5.000\}/\{3,\ 6,\ 9,\ 12\},$$

laddove le poste sono espresse in euro e i tempi in mesi, al tempo iniziale $t = 0$ ***e al tasso di valutazione del*** 4%***.***

Essendo le scadenze espresse in mesi, sarà espressa in mesi pure la scadenza media finanziaria:

$$\bar{t} = \frac{1.000 \cdot 3 + 2.000 \cdot 6 + 3.500 \cdot 9 + 5.000 \cdot 12}{1.000 + 2.000 + 3.500 + 5.000} = 9,26 \textit{ mesi} = 9 \textit{ mesi e } 7 \textit{ giorni.}$$

Nella durata media finanziaria, al denominatore c'é il valore attuale delle poste, dunque:

$$A(0, \underline{\boldsymbol{x}}) = 1.000(1,04)^{-\frac{3}{12}} + 2.000(1,04)^{-\frac{6}{12}} + 3.500(1,04)^{-\frac{9}{12}} + 5.000(1,04)^{-1} =$$

$= 11.157,641513$ *euro. Il numeratore é invece dato dalla quantità:*

$$3 \cdot 1.000(1,04)^{-\frac{3}{12}} + 6 \cdot 2.000(1,04)^{-\frac{6}{12}} + 9 \cdot 3.500(1,04)^{-\frac{9}{12}} + 12 \cdot 5.000(1,04)^{-1}$$

$= 103.016,91007155$ *mesi* $\times$ *euro, e di conseguenza la durata media finanziaria ammonta a:*

$$D(0, \underline{\boldsymbol{x}}) = \frac{103.016,91007155}{11.157,641513} = 9,23 \textit{ mesi} = 9 \textit{ mesi e } 6 \textit{ giorni.}$$

7.2.1 Durata media finanziaria con struttura piatta

Si possono verificare diversi casi di flussi finanziari, ad esempio in condizioni di struttura dei tassi d'interesse costante ad un livello i, ossia:

$$i(t, s) = i = \text{ costante}, \ \ t \leq s.$$

Questo é il caso di **duration a struttura piatta** (o **flat yield curve duration**):

$$D(t, \underline{\mathbf{x}}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} (t_k - t) x_k (1+i)^{-(t_k - t)}}{\sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-(t_k - t)}}.$$

Esempio 115. *Consideriamo ora il caso di una rendita $\mathcal{R}$ posticipata immediata di m rate annue costanti uguali ad R. Ponendo $t = 0$, in questo caso l'espressione della durata media finanziaria della rendita si può scrivere con $x_k = R$, $t_k = k$, $k = 1, 2, \ldots, m$:*

$$D(0, \mathcal{R}) = \frac{\sum_{k=1}^{m} R \cdot k \cdot (1+i)^{-k}}{\sum_{k=1}^{m} R \cdot (1+i)^{-k}},$$

e risulta evidentemente indipendente dall'entità della rata R. Calcoliamone esplicitamente la formula risolutiva.

Il denominatore di questa formula é il valore attuale $a_{\overline{m}|i} = v(1-v^m)/1-v$ di una rendita posticipata immediata annua unitaria di m rate.

Per quanto riguarda invece il numeratore, possiamo calcolare la relativa serie nel modo seguente, riordinandone i termini (questa dimostrazione differisce leggermente da quella in [M], Capitolo 8):

$$\sum_{k=1}^{m} kv^k = v+2v^2+\cdots+mv^m = v+(v^2+v^2)+(v^3+v^3+v^3)+\cdots+(v^m+\cdots+v^m) =$$

$$= (v+v^2+\cdots+v^m)+(v^2+v^3+\cdots+v^m)+(v^3+\cdots+v^m)+\cdots(v^{m-1}+v^m)+v^m =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} v^k + \sum_{k=2}^{m} v^k + \sum_{k=3}^{m} v^k + \cdots + \sum_{k=m-1}^{m} v^k + \sum_{k=m}^{m} v^k =$$

$$= v\frac{1-v^m}{1-v} + \left(v\frac{1-v^m}{1-v} - v\right) + \cdots + \left(v\frac{1-v^m}{1-v} - v - v^2 - \cdots v^{m-1}\right) =$$

$$= \frac{v-v^{m+1}}{1-v} + \frac{v^2-v^{m+1}}{1-v} + \cdots + \frac{v^m-v^{m+1}}{1-v} = \sum_{k=1}^{m} \frac{v^k-v^{m+1}}{1-v} =$$

$$= \frac{1}{1-v}\sum_{k=1}^{m} v^k - \frac{mv^{m+1}}{1-v} = \frac{v}{1-v}\left[\frac{1-v^m}{1-v} - mv^m\right],$$

e di consegenza la duration diventa:

$$D(0, \mathcal{R}) = \frac{\dfrac{v}{1-v}\left[\dfrac{1-v^m}{1-v} - mv^m\right]}{v\dfrac{1-v^m}{1-v}} = \frac{1}{1-v} - \frac{mv^m}{1-v^m},$$

ed espressa in termini di tasso annuo di interesse:

$$D(0, \mathcal{R}) = \frac{1+i}{i} - \frac{m}{(1+i)^m - 1}. \tag{7.2.2}$$

Dalla formula (7.2.2) si possono dedurre esplicitamente alcune caratteristiche della durata media finanziaria: anzitutto, é una funzione crescente nel numero di rate, cioè nella scadenza del flusso $\mathcal{R}$. Come spesso accade nella teoria economica, si può valutare il comportamento, o la sensibilità, di una quantità rispetto ad una qualsiasi variabile (o parametro) che essa contiene calcolandone le derivate parziali. In questo caso, la positività di questa derivata é semplice da valutare:

$$\frac{\partial D(0,\mathcal{R})}{\partial m} = \frac{-(1+i)^m + 1 + m^2(1+i)^{m-1}}{((1+i)^m - 1)^2},$$

che é sempre positiva in quanto al numeratore

$$\frac{m^2(1+i)^m}{1+i} > (1+i)^m \quad \forall\ m \geq 2.$$

Inoltre, tendendo il numero di rate all'infinito, abbiamo la duration di una rendita immediata posticipata annua costante perpetua: $\dfrac{1+i}{i}$.

Esercizio 116. ***Calcolare la durata media finanziaria al tempo 0 di una rendita costituita da 4 rate annuali costanti posticipate ad un tasso di valutazione annuo dell'*** 11%***.***

Utilizzando direttamente la formula (7.2.2) la duration risulta:

$$D(0,\mathcal{R}) = \frac{1+0,11}{0,11} - \frac{4}{(1+0,11)^4 - 1} = 2,37 \textit{ anni} =$$

=2 anni, 4 mesi e 13 giorni.

Se consideriamo invece dei titoli a cedola fissa (al solito, pensiamo ai BTP), in $t = 0$, con scadenza m, valore nominale C e cedole annuali uguali ad I, il flusso dei pagamenti relativi sarà:

$$\mathbf{x} = \{I, I, \ldots, C+I\},$$

rispettivamente esigibili agli istanti t_k, $k = 1, \ldots, m$. La flat yield curve duration del titolo, calcolata al tasso i, sarà:

$$D(0,\mathbf{x}) = \frac{I\sum_{k=1}^{m} k(1+i)^{-k} + mC(1+i)^{-m}}{I\sum_{k=1}^{m}(1+i)^{-k} + C(1+i)^{-m}}. \tag{7.2.3}$$

Esercizio 117. ***Dato il flusso di cassa di un titolo con 3 cedole annuali di 100 euro l'una, valutate al tasso semestrale del*** 2%***, quale deve essere il valore nominale del titolo affinchè la sua durata media finanziaria in 0 sia uguale a 2 anni e 6 mesi?***

Prima di tutto, convertiamo il tasso da semestrale ad annuale:

$$i = (1 + i_{1/2})^2 - 1 = 4,04\%.$$

Successivamente, applichiamo la formula (7.2.3) lasciando il valore nominale C come incognita e imponendo che la durata media finanziaria sia uguale a 2 anni e 6 mesi=2,5 anni:

$$2,5 = \frac{100(1 \cdot (1,0404)^{-1} + 2 \cdot (1,0404)^{-2} + 3 \cdot (1,0404)^{-3}) + 3 \cdot C(1,0404)^{-3}}{100((1,0404)^{-1} + (1,0404)^{-2} + (1,0404)^{-3}) + C(1,0404)^{-3}},$$

da cui:

$$2,5 = \frac{96,116 + 184,769 + 266,391 + 2,663C}{96,116 + 92,384 + 88,797 + 0,888C} \iff$$

$$\iff 2,5 = \frac{547,276 + 2,663 \cdot C}{277,297 + 0,888 \cdot C} \iff$$

$$\iff 693,2425 + 2,22 \cdot C = 547,276 + 2,663 \cdot C,$$

che implica

$$C = \frac{145,9665}{0,443} = 329,495 \text{ \emph{euro}}.$$

7.3 Indici di variabilità di un flusso di pagamenti

In tutti i casi in cui ha senso effettuare la valutazione al tempo t del flusso di importi, tutti non negativi, $\mathbf{x}/\mathbf{t} = \{x_1, \ldots, x_m\}/\{t_1, \ldots, t_m\}$ in base ad una struttura dei rendimenti piatta, ad esempio al livello del tasso di valutazione i, il prezzo risultante:

$$A(t, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{m} x_k (1+i)^{-(t_k - t)}$$

dipende dall'unico parametro i caratteristico del mercato.

Considerando da ora in poi per semplicità di notazione $t = 0$, possiamo vedere il prezzo del flusso come funzione di i (o anche dell'intensità d'interesse $\delta = \log(1+i)$), ed individuarne alcune proprietà analitiche:

$$A(i) > 0, \qquad A(0) = \sum_{k=1}^{m} x_k, \qquad \lim_{i \to +\infty} A(i) = 0.$$

Inoltre, $A(i)$ é derivabile infinite volte:

$$A'(i) = -\sum_{k=1}^{m} t_k x_k (1+i)^{-t_k - 1},$$

$$A''(i) = \sum_{k=1}^{m} t_k(t_k+1)x_k(1+i)^{-t_k-2}.$$

Quindi $A(i)$ é decrescente ma anche convessa, ovviamente per i valori positivi di i. Da quest'espressione e dalle sue derivate si ricavano i principali indici di variabilità utilizzati nella cosiddetta **analisi di sensitività** del prezzo rispetto ad i (oppure anche rispetto a δ). Con le notazioni suddette, diamo le seguenti definizioni:

Definizione 118. *Si definisce **semielasticità** il rapporto tra la derivata prima della funzione prezzo e la funzione stessa:*

$$\frac{A'(i)}{A(i)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k x_k (1+i)^{-t_k-1}}{\sum_{k=1}^{m} x_k(1+i)^{-t_k}} = -\frac{1}{1+i} D(0, \boldsymbol{x}).$$

Definizione 119. *Si definisce **elasticità** il prodotto della semielasticità per il valore della variabile indipendente:*

$$i\frac{A'(i)}{A(i)} = \frac{\frac{dA}{A}}{\frac{di}{i}} = -\frac{i}{1+i} D(0, \boldsymbol{x}).$$

A volte viene introdotta la cosiddetta **duration modificata**:

$$D_{mod}(0, \mathbf{x}) = \frac{D(0, \mathbf{x})}{1+i},$$

da cui la semielasticità risulta $\frac{A'(i)}{A(i)} = -D_{mod}(0, \mathbf{x})$, e l'elasticità é $i\frac{A'(i)}{A(i)} = -iD_{mod}(0, \mathbf{x})$.

Intuitivamente, la semielasticità misura la velocità di variazione del prezzo per unità di capitale. Invece l'elasticità del prezzo rispetto ad i rappresenta il limite del rapporto tra la variazione percentuale del prezzo e la variazione percentuale del tasso di valutazione, al tendere a zero della variazione del tasso.

Definizione 120. *Si chiama **convexity** il rapporto tra la derivata seconda della funzione prezzo e la funzione stessa:*

$$\frac{A''(i)}{A(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{m} t_k(t_k+1)x_k(1+i)^{-t_k-2}}{\sum_{k=1}^{m} x_k(1+i)^{-t_k}}.$$

Definizione 121. *Si chiama **convessità relativa** di una funzione il rapporto tra la sua derivata seconda e la sua derivata prima:*

$$\frac{A''(i)}{A'(i)} = -\frac{\sum_{k=1}^{m} t_k(t_k+1)x_k(1+i)^{-t_k-2}}{\sum_{k=1}^{m} t_k x_k(1+i)^{-t_k-1}}.$$

In particolare, quest'ultimo indice fornisce una misura della velocità di variazione del prezzo in unità di variazione del prezzo.

Esercizio 122. ***Consideriamo il titolo che garantisce il flusso***

$$\boldsymbol{x}/\boldsymbol{t} = \{10, 10, 10, 110\}/\{1, 2, 3, 4\},$$

essendo il tempo misurato in anni. Con riferimento ad una struttura piatta al livello del 10% ***annuo, calcoliamone i principali indici di sensitività.***

Avremo rispettivamente:

$$A(0, \boldsymbol{x}) = 10(1,1)^{-1} + 10(1,1)^{-2} + 10(1,1)^{-3} + 110(1,1)^{-4} = 100;$$

$$D(0, \boldsymbol{x}) = \frac{10 \cdot (1,1)^{-1} + 20 \cdot (1,1)^{-2} + 30 \cdot (1,1)^{-3} + 440 \cdot (1,1)^{-4}}{A(0, \boldsymbol{x})} =$$

$$= \frac{348,6838}{100} = 3,4868 \text{ } \mathit{anni} = 3 \text{ } \mathit{anni}, \text{ } 5 \text{ } \mathit{mesi} \text{ } e \text{ } 25 \text{ } \mathit{giorni}.$$

Gli indici di variabilità sono i seguenti:

la semielasticità é data da:

$$\frac{A'(i)}{A(i)} = -\frac{1}{1+i} D(0, \boldsymbol{x}) = -\frac{1}{1,1} 3,4868 = -3,169.$$

L'elasticità é:

$$i\frac{A'(i)}{V(i)} = 1,1 \cdot (-3,169) = -3,4859.$$

7.4 Risultati principali sull'immunizzazione

Per trattare i punti cardine dell'immunizzazione finanziaria, usiamo una notazione specifica, lievemente diversa da quelle utilizzate precedentemente. Supponiamo di avere un portafoglio di titoli:

$$\mathcal{P} = \{Q_1, \ldots, Q_m\}/\{t_1, \ldots, t_m\},$$

visto come operazione finanziaria, o visto come flusso di entrate, di cui la j-esima posta corrisponde alla quantità Q_j di zero coupon bond unitari in scadenza alla data t_j. Per ogni $j = 1, \ldots, m$, $Q_j \geq 0$.

Supponiamo inoltre che la forza d'interesse non sia costante, ma dipendente dal tempo: $\delta(t)$.

Per la durata media finanziaria e per la convexity del portafoglio dato, cambiamo la notazione in modo da specificare anche la forza d'interesse, ossia:

$$D_{\mathcal{P}}(s, \delta(t)) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(t_k - s)Q_k v(s, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} Q_k v(s, t_k)},$$

per la durata media finanziaria al tempo s, dove $v(\cdot)$ é la struttura a termine dei tassi d'interesse associata a $\delta(t)$, mentre la convexity viene denotata con:

$$Conv_{\mathcal{P}}(s, \delta(t)) = \frac{\sum_{k=1}^{m}(s - t_k)^2 Q_k v(s, t_k)}{\sum_{k=1}^{m} Q_k v(s, t_k)},$$

e anche qui bisogna stare attenti a non confondere l'istante s di valutazione, con la variabile temporale t, che é argomento della forza d'interesse $\delta(\cdot)$, e le date $t_1, \ldots, t_m$ dello scadenzario del portafoglio $\mathcal{P}$.

7.4.1 Immunizzazione ad un'unica uscita

Il problema che dobbiamo affrontare consiste nel dover avere bisogno, ad un dato istante futuro T, della somma di denaro U da pagare. Il valore del nostro portafoglio $\mathcal{P}$ a quell'istante di tempo, come sappiamo, sarà:

$$W_{\mathcal{P}}(T, \delta(t)) = \sum_{t_k \leq T} Q_k r(t_k, T) + \sum_{t_k > T} Q_k v(t_k, T),$$

laddove $r(\cdot)$ é il fattore di capitalizzazione associato alla struttura a termine $v(\cdot)$, ossia il suo inverso: $r(t_k, T) = v^{-1}(t_k, T)$, quindi al solito il montante delle quote incassate prima dell'istante T sommato al valore attuale in T delle quote ancora da incassare.

La condizione da soddisfare é che tale valore equivalga alla somma da dover pagare, U, all'istante T:

$$W_{\mathcal{P}}(T, \delta(t)) = U.$$

Ma naturalmente l'informazione che la struttura dei tassi sia $\delta(t)$ é quella che abbiamo all'inizio e che, in qualche modo, prevediamo. Ma cosa accade se sopraggiunge un improvviso cambiamento nella struttura dei tassi, cioè uno shock (o anche uno **shift**, vale a dire uno spostamento della curva dei tassi)? Dobbiamo trovare una strategia di immunizzazione, o di copertura, in modo da capire se sotto certe ipotesi, anche con lo shock, saremo ancora in grado di disporre al tempo T della somma U, almeno.

Generalmente, nella realtà economica, le strutture piatte dei tassi sono molto rare. Possono esserci shock **endogeni**, cioè derivanti da dinamiche interne al mercato, per esempio una bolla immobiliare o il default di un grande gruppo bancario, o anche **esogeni**, cioè provocati da eventi esterni al mercato, come lo scoppio di una guerra o la caduta di un Governo, che normalmente provocano forti incertezze o turbolenze sui mercati.

Distinzioni a parte, gli shock che normalmente consideriamo sono di tipo additivo, vale a dire che nello spazio tra due istanti successivi x e $x+t$ la forza d'interesse é sempre $\delta(t)$ tranne negli istanti in cui si configura un salto e, da allorain avanti, diventa $\delta(t)+\epsilon$. Detto s^* l'istante dello shock, possiamo scrivere nel modo seguente:

$$\delta(x, x+t) = \begin{cases} \delta(t) & \text{se} \quad x \in [0, s^*) \\ \delta(t)+\epsilon & \text{se} \quad x > s^* \end{cases}$$

Chiamando per brevità $\delta_{\epsilon *}(t)$ la forza d'interesse incrementata $\delta(t)+\epsilon$, enunciamo di seguito, senza dimostrarlo, il teorema fondamentale dell'immunizzazione ad un'unica uscita (si intende la somma U), dovuto a Lawrence Fisher e a Roman L. Weil (1971):

Teorema 123. *Se al tempo s^* in cui si verifica la variazione della forza d'interesse $\delta(t) \mapsto \delta_\epsilon(t)$ risulta:*

$$D_{\mathcal{P}}(s^*, \delta(t)) = T - s^*,$$

allora $\forall\ \epsilon \in \mathbb{R}$, si avrà:

$$W_{\mathcal{P}}(T, \delta(t)) \leq W_{\mathcal{P}}(T, \delta_\epsilon(t)).$$

L'importante conseguenza di questo risultato consiste nel fatto che se il valore del portafoglio inizialmente é adeguato all'entità dell'uscita, e se la durata media finanziaria valutata in s^* é $T - s^*$, il portafoglio non diminuisce il suo valore e quindi di fatto é immunizzato.

Un breve commento: come si può notare le ipotesi di questo teorema sono piuttosto forti. In pratica esso, affermando che nell'istante corrispondente alla sua durata media finanziaria, il portafoglio $\mathcal{P}$ é immunizzato, implica che se si potesse ricalibrare il portafoglio istante per istante in modo tale che la condizione di Fisher-Weil fosse verificata sempre, l'immunizzazione varrebbe sempre. Questa specie di copertura dinamica del portafoglio é l'analogo della procedura che nella teoria di base del pricing delle opzioni permetterebbe di annullare la parte rischiosa della dinamica aleatoria del prezzo del titolo. In queste dispense non ci occupiamo di Finanza Matematica, i lettori e le lettrici interessate ad approfondire l'argomento possono consultare ad esempio [PR].

7.4.2 Immunizzazione a più uscite

In questo caso, consideriamo non più soltanto un'unica somma da possedere ad un dato istante T, ma un intero portafoglio composto da uscite, ossia da poste non positive U_k, su uno scadenzario discreto, eventualmente diverso da quello delle entrate:

$$\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}/\{\tau_1, \ldots, \tau_n\},$$

intendendo che le date di entrata e di uscite possono non coincidere ed anche essere in numero differente. Ovviamente, qui dovremo considerare il valore attuale del portafoglio $\mathcal{U}$:

$$A_{\mathcal{U}}(0, \delta(t)) = \sum_{h=1}^{n} U_h v(0, \tau_h),$$

e questa volta la condizione necessaria per l'immunizzazione del portafoglio composto dalle entrate di $\mathcal{P}$ e dalle uscite di $\mathcal{U}$ sarà data dall'uguaglianza tra i rispettivi valori attuali:

$$A_{\mathcal{U}}(0, \delta(t)) = A_{\mathcal{P}}(0, \delta(t)).$$

Consideriamo anche in questa situazione uno shock additivo suitassi d'interesse di ampiezza ϵ. La tecnica per ricavare un teorema analogo a quello di Fisher-Weil si basa sull'analisi della funzione

$$G(\epsilon) := A_{\mathcal{P}}(0, \delta_\epsilon(t)) - A_{\mathcal{U}}(0, \delta_\epsilon(t)),$$

corrispondente alla differenza tra i valori attuali dei flussi in entrata e in uscita quando la forza d'interesse ha subito lo shock additivo. Dimostrando che $G(\epsilon)$ ammette un minimo in $\epsilon = 0$, si prova che per valori di ϵ abbastanza piccoli in modulo, il valore attuale di $\mathcal{P}$ é sempre non minore di quello di $\mathcal{U}$. Il teorema seguente, dovuto a Frank Redington (1952), e di cui omettiamo la dimostrazione, formalizza le ipotesi affinchè ciò valga:

Teorema 124. *Se al tempo s in cui avviene lo shock additivo valgono le seguenti proprietà:*

1. $A_{\mathcal{P}}(s, \delta(t)) = A_{\mathcal{U}}(s, \delta(t))$,
2. $D_{\mathcal{P}}(s, \delta(t)) = D_{\mathcal{U}}(s, \delta(t)) = \theta$,
3. $Conv_{\mathcal{P}}(\theta, \delta(t)) \geq Conv_{\mathcal{U}}(\theta, \delta(t))$,

allora per valori di ϵ abbastanza piccoli in modulo, vale:

$$A_{\mathcal{P}}(s, \delta_\epsilon(t)) > A_{\mathcal{U}}(s, \delta_\epsilon(t)).$$

Il risultato di Redington si differenzia da quello di Fisher-Weil per la sua valenza locale piuttosto che globale, cioè la piccolezza richiesta per l'ampiezza ϵ rischia di vanificare il teorema per degli shock troppo grandi. La somiglianza sta invece nella possibilità ancorchè teorica, di ricalibrare dinamicamente il portafoglio per mantenerlo immunizzato.

Capitolo 8

Elementi di calcolo delle probabilità

Per comprendere gli sviluppi più recenti della Matematica Finanziaria, in particolare quelli dalla Teoria dell'Utilità, formalizzata compiutamente nei tardi anni '40 fino al pricing e alla valutazione dei prodotti finanziari complessi sui nostri mercati, abbiamo bisogno di alcuni principi preliminari di Calcolo delle Probabilità. Il Calcolo delle Probabilità quell'area della Matematica che studia e analizza i fenomeni incerti ed aleatori, e di cui enunceremo solo alcune nozioni di base, necessarie per questo corso. Per le teorie successive della Finanza Matematica (equazioni differenziali stocastiche, dinamiche aleatorie di tassi e azioni, ecc.) rimandiamo a testi più completi ([C], [P],...).

8.1 Spazi di probabilità

La notazione utilizzata in questo Capitolo é tratta da [B]. Consideriamo un qualsiasi fenomeno aleatorio, che prevede più di un possibile risultato, e che non abbiamo la facoltà di conoscere con certezza. Possiamo pensare all'esito di un lancio di un dado, all'estrazione dei numeri della tombola, all'ordine di arrivo di un Gran Premio di Formula 1, all'esito del prossimo appello di Economia degli Intermediari Finanziari, all'andamento del vostro fondo azionario, ecc.

8.1.1 Definizioni e proprietà preliminari

Chiamiamo Ω l'insieme dei possibili risultati, e consideriamo una qualsiasi famiglia $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di Ω. Gli elementi di $\mathcal{E}$ saranno indicati come **eventi**.

Definizione 125. *Dati 2 qualsiasi eventi* $E_1,\ E_2 \in \mathcal{E}$*, chiameremo:*

- $E_1 \cup E_2$ ***evento unione***, *corrispondente al verificarsi di almeno uno tra gli eventi* E_1 *ed* E_2*;*
- $E_1 \cap E_2$ ***evento intersezione***, *corrispondente al verificarsi di entrambi gli eventi* E_1 *ed* E_2*;*
- E_1^C ***evento complementare***, *corrispondente al non verificarsi dell'evento* E_1.

Il nostro scopo é quello di associare ad ogni evento una funzione probabilità che ne quantifichi, appunto, la probabilità che esso avvenga. A questo scopo, ci servono alcune definizioni rigorose.

Definizione 126. *Una famiglia* $\mathcal{E}$ *di sottoinsiemi di un insieme* Ω *si dice una* σ-***algebra*** *se valgono le seguenti proprietà:*

1. $\emptyset, \ \Omega \in \mathcal{E}$;
2. *se* $E \in \mathcal{E}$, *allora* $E^C \in \mathcal{E}$;
3. *se* $E_1, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{E}$, *allora*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}, \qquad \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{E}.$$

Definizione 127. *Dato un insieme* Ω, *e una sua* σ*-algebra di sottoinsiemi* $\mathcal{A}$, *un'applicazione* $P : \mathcal{E} \longrightarrow [0,1]$ *si dice* ***probabilità*** *se:*

1. $P(\Omega) = 1$;
2. *per ogni successione* $\{E_n\}_n$ *di elementi di* $\mathcal{E}$ *disgiunti a due a due, vale:*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n).$$

Possiamo finalmente caratterizzare l'ambiente matematico, o meglio ancora il modello, in cui analizzeremo qualsiasi tipo di situazione soggetta ad incertezza.

Definizione 128. *Chiamiamo* ***spazio di probabilità*** *una terna* $(\Omega, \ \mathcal{E}, \ P)$ *in cui* Ω *é un insieme,* $\mathcal{E}$ *é una* σ*-algebra di sottoinsiemi di* Ω *e* P *é una probabilità.*

In generale, per ogni fenomeno aleatorio si può costruire, in modo soggettivo, uno spazio di probabilità. Ma valutazioni differenti sulle probabilità relative a certi eventi possono dare luogo alla costruzione di spazi differenti. Ad esempio, nel caso di un evento calcistico, differenti persone potranno associare differenti probabilità alla vittoria di una squadra o dell'altra oppure al pareggio. Sicuramente, il nostro scopo é facilitato in presenza di eventi che hanno naturalmente la stessa probabilità (cosiddetti **equiprobabili**), e sui quali esiste una valutazione oggettiva. Sempre nell'ambito del gioco, vediamo questo esempio.

Esempio 129. *Supponiamo di voler lanciare 2 volte una monetina, che prima dell'avvento dell'euro aveva quasi sempre una testa su una delle due facce (ad esempio le ormai dimenticate 100 o 200 lire). Se la nostra monetina non é in alcun modo truccata, ad ogni lancio gli eventi Testa e Croce sono equiprobabili. Sui due lanci, ci sono quattro eventi possibili:*

E_{TT}=*{esce Testa sia al primo che al secondo lancio};*

E_{TC}=*{escono Testa al primo lancio e Croce al secondo lancio};*

E_{CT}=*{escono Croce al primo lancio e Testa al secondo lancio};*

E_{CC}=*{esce Croce sia al primo che al secondo lancio}.*

Oltre ad essere equiprobabili, tali eventi sono ***incompatibili****, vale a dire qualunque di essi avvenga rende impossibile che ne avvenga qualsiasi altro. Nel caso di eventi incompatibili, é particolarmente semplice verificare le ipotesi delle definizioni, infatti:*

$$\Omega = \{TT,\ TC,\ CT,\ CC\},$$

e $\mathcal{E}$ é l'insieme delle parti di Ω, vale a dire l'insieme di tutti i sottoinsiemi di Ω, compresi Ω stesso e l'insieme vuoto $\emptyset$. Di conseguenza, l'intersezione dei 4 eventi é l'insieme vuoto, che quindi appartiene a $\mathcal{E}$, e la loro unione é tutto l'insieme Ω, e quindi sono contemporaneamente verificate la prima e la terza ipotesi affinchè $\mathcal{E}$ sia una σ-algebra. La seconda ipotesi é evidente perchè tutti i sottoinsiemi complementari, cioè composti da 3 elementi di Ω, appartengono all'insieme delle parti.

Essendo gli eventi equiprobabili, ognuno di essi dovrebbe avere probabilità 1/4 (un caso favorevole su 4 casi possibili), quindi si avrà:

$$P(E_{TT}) = P(E_{TC}) = P(E_{CT}) = P(E_{CC}) = \frac{1}{4},$$

$$P(E_{TT} \cup E_{TC} \cup E_{CT} \cup E_{CC}) = P(\Omega) = 1,$$

$$P(E_{TT}) + P(E_{TC}) + P(E_{CT}) + P(E_{CC}) = 1/4 + 1/4 + 1/4 + 1/4 = 1,$$

e quindi, poichè le quantità a primo membro coincidono, P é effettivamente una probabilità per questo modello. Da notare, infine, che in questo tipo di esercizi bisogna prestare attenzione a come vengono poste le domande, per non incorrere in errori banali. Su 4 casi, ce ne sono 2 in cui esce una Testa e una Croce, *quindi la probabilitàÂ che esca prima Testa e poi Croce é* $P(E_{TC}) = 1/4$*, mentre la probabilità che escano una Testa e una Croce, senza considerarne l'ordine, é la somma delle 2 probabilità miste:* $P(E_{TC}) + P(E_{CT}) = 1/2$.

In generale, se E_1 ed E_2 sono eventi incompatibili, come da definizione:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2), \qquad P(E_1 \cap E_2) = P(\emptyset) = 0.$$

Inoltre, dato un qualsiasi evento $E \in \mathcal{E}$, $E \cup E^C = \Omega$, $E \cap E^C = \emptyset$, di conseguenza:

$$P(E^C) = 1 - P(E). \tag{8.1.1}$$

Considerando anche eventi non incompatibili, $E_1, \ldots, E_n, \ldots$, abbiamo la **Formula di De Morgan**:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \right)^C = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^C,$$

da cui, passando alle probabilità, per (8.1.1) si ha:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^C \right). \tag{8.1.2}$$

Teorema 130. *Dati 2 eventi* $E_1,\ E_2 \in \mathcal{E}$*, vale la seguente formula:*

$$P(E_1) + P(E_2) = P(E_1 \cup E_2) + P(E_1 \cap E_2). \tag{8.1.3}$$

Dimostrazione. Prima di tutto, consideriamo due eventi qualsiasi, quindi non necessariamente disgiunti, $E_1,\ E_2 \in \mathcal{E}$. Poichè $E_2 \cap E_2^C = \emptyset$, anche le due intersezioni con l'altro evento E_1 sono disgiunte, vale a dire:

$$(E_1 \cap E_2) \cap (E_1 \cap E_2^C) = E_1 \cap (E_2 \cap E_2^C) = \emptyset,$$

mentre l'unione coincide con tutto E_1, perchè:

$$(E_1 \cap E_2) \cup (E_1 \cap E_2^C) = E_1 \cup (E_2 \cap E_2^C) = E_1,$$

per cui la probabilità dell'evento E_1 si può scrivere con la formula degli eventi incompatibili:

$$P(E_1) = P(E_1 \cap E_2) + P(E_1 \cap E_2^C). \tag{8.1.4}$$

D'altra parte, possiamo notare che:

$$E_1 \cup E_2 = E_2 \cup (E_1 \cap E_2^C) = (E_2 \cup E_1) \cap (E_2 \cup E_2^C),$$

ma E_2 ed $E_1 \cap E_2^C$ sono anche disgiunti, perchè:

$$E_2 \cap (E_1 \cap E_2^C) = (E_2 \cap E_1) \cap \emptyset = \emptyset,$$

quindi

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_2) + P(E_1 \cap E_2^C), \tag{8.1.5}$$

di conseguenza, ricavando il termine comune $P(E_1 \cap E_2^C)$ in (8.1.4) e sostituendo in (8.1.5), otteniamo la relazione (8.1.3). $\square$

Esercizio 131. ***Supponiamo di estrarre casualmente una carta da un mazzo di 40 carte napoletane e di voler calcolare la probabilità che la carta uscita non sia né un asso né una carta del seme dei Denari (detti anche Ori).***

Gli eventi da considerare saranno:

E_1=*{la carta estratta é un asso}, la cui probabilità é* $P(E_1) = \dfrac{1}{10}$;

E_2=*{la carta estratta é un Denaro}, la cui probabilità é* $P(E_2) = \dfrac{1}{4}$;

$E_1 \cap E_2$=*{la carta estratta é l'asso di Denari}, la cui probabilità é* $P(E_1 \cap E_2) = \dfrac{1}{40}$. *La probabilità dell'evento unione, ossia che la carta estratta sia o un qualsiasi asso oppure un qualsiasi Denaro é data dalla formula (8.1.3):*

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{40} = \frac{13}{40}.$$

Per concludere, la probabilità che la carta estratta non sia né un asso né un Denaro é l'evento complementare a $E_1 \cup E_2$, *quindi applicando (8.1.1):*

$$P((E_1 \cup E_2)^C) = 1 - P(E_1 \cup E_2) = \frac{27}{40}.$$

Allo stesso risultato, ovviamente, si poteva arrivare sommando le 9 Spade ai 9 Bastoni alle 9 Coppe, vale a dire tutte le carte degli altri semi private dei rispettivi assi (ovviamente i primi esempi sono elementari e risolvibili anche senza formule rigorose, ma bisogna apprendere la metodologia per i successivi casi più difficili).

8.1.2 Probabilità condizionata

Consideriamo uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ e diamo una caratterizzazione alle probabilità degli eventi quando abbiamo un'informazione a priori. Condizionare la probabilità di un evento al verificarsi di un altro evento non implica necessariamente definire un evento condizionato, ma semplicemente raffinare la definizione dello stesso evento.

Definizione 132. *Dati 2 eventi E_1, E_2 con $P(E_2) > 0$, si dice* ***probabilità condizionata (o condizionale)*** *di E_1 rispetto ad E_2 la seguente quantit à:*

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)}. \tag{8.1.6}$$

$P(E_1 \mid E_2)$ rappresenta la probabilità che si verifichi E_1 data l'informazione che E_2 si é, contemporaneamente o in precedenza, verificato. Dalla definizione, possiamo dedurre facilmente quella che é universalmente nota come **formula di Bayes**:

$$P(E_1 \mid E_2)P(E_2) = P(E_2 \mid E_1)P(E_1).$$

Inoltre, se $E_1, \ldots, E_N$ sono N eventi disgiunti tali che $E_1 \cup \ldots \cup E_N = \Omega$, la formula di Bayes si può estendere. Dato un evento F con $P(F) > 0$, vale la seguente:

$$P(E_i \mid F) = \frac{P(E_i)P(F \mid E_i)}{\sum_{k=1}^{N} P(E_k)P(F \mid E_k)}. \tag{8.1.7}$$

Esercizio 133. ***Supponiamo di avere un sacchetto di 12 frutti, 8 agrumi (5 arance e 3 limoni) e 4 mele. Mettiamo una mano nel sacchetto senza guardarci dentro e prendiamo un frutto dalla buccia rugosa, vale a dire un agrume. Qual é la probabilità, dato che stiamo prendendo un agrume, che esso sia un limone?***

Possiamo denominare gli eventi in questo modo:

E_1= {*il frutto preso é un limone*};

E_2= {*il frutto preso é un agrume*}.

Calcoliamo la probabilità condizionata del primo evento al secondo. Poichè la probabilità dell'evento intersezione é $\frac{3}{12}$ *e la probabilità di pescare un limone é* $\frac{8}{12}$*, la probabilità condizionata risulta:*

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{3/12}{8/12} = \frac{3}{8}.$$

Da notare come, in pratica, la probabilità risultante sia la stessa che si avrebbe se nel sacchetto non ci fosse stato alcun altro frutto, che equivale a dire che il fatto che non venga preso alcun altro frutto era già contenuto nell'informazione di partenza.

Nel prossimo esempio, di nuovo tratto dal gioco, applicheremo la formula (8.1.7).

Esempio 134. *Supponiamo di lanciare consecutivamente 2 dadi (la tempistica non ha importanza, in realtà), e di costruire uno spazio di probabilità per la somma dei dadi usciti. I dadi non sono truccati, quindi l'insieme dei risultati, tra loro incompatibili, sarà il seguente:*

$$\Omega = \{2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\},$$

e, al solito, l'insieme degli eventi sarà dato dall'insieme delle parti di Ω.

Per la definizione della probabilità P é necessario contare quante volte ognuna di queste somme può verificarsi, perchè ovviamente non sono equiprobabili: ad esempio il valore 11 può venire soltanto dalla coppia di uscite 6 e 5 oppure 5 e 6, mentre il valore 5 può risultare da 2 e 3, 3 e 2, 4 e 1 oppure 1 e 4. Descriviamo ogni evento in questo modo:

E_j=*{la somma dei 2 numeri usciti é j}*, $j = 2, \ldots, ..., 12$.

Quindi abbiamo numerato gli eventi da E_2 a E_{12}. Essendo 36 i possibili esiti dei 2 lanci, si trova che la probabilità P da associare prende i seguenti valori:

$$P(E_2) = \frac{1}{36}, \quad P(E_3) = \frac{2}{36}, \quad P(E_4) = \frac{3}{36}, \quad P(E_5) = \frac{4}{36},$$

$$P(E_6) = \frac{5}{36}, \quad P(E_7) = \frac{6}{36}, \quad P(E_8) = \frac{5}{36}, \quad P(E_9) = \frac{4}{36},$$

$$P(E_{10}) = \frac{3}{36}, \qquad P(E_{11}) = \frac{2}{36}, \qquad P(E_{12}) = \frac{1}{36}.$$

Consideriamo l'evento:

F= *{uno dei due dadi usciti é il 6}*,

e cerchiamo di calcolare, ad esempio, la probabilità condizionata $P(E_8 \mid F)$ usando la formula (8.1.7). Prima di tutto, calcoliamo tutte le probabilità condizionate $P(F \mid E_j)$, compito piuttosto semplice quando la somma dei dadi usciti non supera il 6, perchè evidentemente é 0, in caso contrario, dobbiamo calcolare le possibili occorrenze del 6 nelle varie somme, ad esempio su E_9 le somme possibili sono 4, e in 2 di esse compare il 6, quindi $P(F \mid E_9) = 2/4$. Più in dettaglio:

$P(F \mid E_j) = 0$ *se* $j = 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,$

$$P(F \mid E_7) = \frac{2}{6}, \quad P(F \mid E_8) = \frac{2}{5}, \quad P(F \mid E_9) = \frac{2}{4},$$

$$P(F \mid E_{10}) = \frac{2}{3}, \qquad P(F \mid E_{11}) = 1, \qquad P(F \mid E_{12}) = 1.$$

Di conseguenza, la sommatoria a denominatore in (8.1.7) contiene soltanto 6 termini, per cui avremo:

$$P(E_8 \mid F) = \frac{\frac{5}{36} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{2}{6} \cdot \frac{6}{36} + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{36} + \frac{2}{4} \cdot \frac{4}{36} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{2}{11}.$$

Va notato che allo stesso risultato si poteva pervenire contando le occorrenze della somma 8 in tutte le uscite col 6: in breve, su 11 possibili uscite (1 e 6, 2 e 6, 3 e 6, 4 e 6, 5 e 6, 6 e 6, 6 e 1, 6 e 2, 6 e 3, 6 e 4, 6 e 5), la somma 8 occorre 2 volte, da cui il rapporto 2/11.

8.1.3 Indipendenza tra eventi

Un concetto cruciale nel Calcolo delle Probabilità riguarda l'analisi degli eventi e della loro correlazione, ossia di quanto uno di essi dipenda da un altro, o da tutti gli altri. Quando 2 eventi non hanno alcuna forma di correlazione, le cose sono particolarmente semplici.

Definizione 135. *2 eventi E_1 ed E_2 si dicono **indipendenti** se e solo se*

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2).$$

Definizione 136. *N eventi $E_1, \dots E_N$ si dicono **a due a due indipendenti** se e solo se*

$$P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j),$$

$\forall\ i \neq j,\ i,\ j = 1, \dots, N.$

Per sgomberare il campo da un classico (e pericoloso) luogo comune, ogni fenomeno aleatorio che si ripete con le stesse condizioni più di una volta, é un evento indipendente dal precedente, come il lancio ripetuto di una moneta, le estrazioni del Lotto, i sorteggi di qualsiasi tipo con rimpiazzo o reimbussolamento, la generazione di numeri casuali, ecc. Per questo motivo, ad esempio, é piuttosto insensato giocare al Lotto basandosi sui ritardi dei numeri, in quanto ad ogni estrazione, sempre se non truccata, l'evento é indipendente dal precedente, e quindi le probabilità sono esattamente le stesse.

Cosa accade alla probabilità condizionata nel caso di indipendenza tra eventi? L'effetto risulta chiaro: se E_1 ed E_2 sono indipendenti, il fatto che E_2 si verifichi non condiziona in alcun modo il verificarsi di E_1 e infatti, usando la formula (8.1.6) e la definizione precedente, sempre se $P(E_2) > 0$, abbiamo:

$$P(E_1 \mid E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1)P(E_2)}{P(E_2)} = P(E_1),$$

ossia il vincolo di condizionamento di un evento ad un altro evento indipendente ne lascia uguale la probabilità.

Esercizio 137. ***Calcolare la probabilità che, dovendo estrarre 2 numeri alla tombola in 2 diverse estrazioni con reimbussolamento, vale a dire rimettendo dentro l'urna il numero estratto inizialmente, il primo numero sia il 42 e il secondo numero sia di due cifre e abbia come prima cifra il 4.***

Le due estrazioni sono 2 eventi indipendenti, chiamiamo il primo E*, che ha probabilità ovviamente 1/90, come l'avrebbe l'estrazione di ogni altro numero diverso dal 42, e il secondo* F*, che ha probabilità 10/90, in quanto i casi favorevoli corrispondono ai 10 numeri dal 40 al 49. Di conseguenza, essendo i 2 eventi indipendenti, la probabilità che avvengano entrambi é data dal loro prodotto:*

$$P(E \cap F) = P(E)P(F) = \frac{1}{90}\frac{10}{90} = \frac{1}{810}.$$

Esempio 138. *Consideriamo il gioco della roulette, in cui una pallina viene lanciata e, dopo aver girato su una ruota nella cui circonferenza ci sono delle caselle numerate da 0 a 36, cade in una di quelle caselle. Supponiamo di fare 3 lanci di pallina, che corrispondono evidentemente a 3 eventi tra loro indipendenti, e costruiamo lo spazio di probabilità dell'uscita del numero 0 (é una scelta come un'altra, perchè i numeri sono tutti equiprobabili). Abbiamo 4 possibili eventi:*

E_0=*{lo 0 non esce in nessun lancio};*

E_1=*{lo 0 esce in uno dei 3 lanci};*

E_2=*{lo 0 esce in 2 dei 3 lanci};*

E_3=*{lo 0 esce in tutti e 3 i lanci}.*

Calcoliamo le rispettive probabilità:

$$P(E_0) = \frac{36}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{36}{37} = \left(\frac{36}{37}\right)^3.$$

$$P(E_1) = \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{36}{37} + \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} + \frac{36}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{3 \cdot 36^2}{37^3}.$$

$$P(E_2) = \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} + \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} + \frac{1}{37} \cdot \frac{36}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{108}{37^3}.$$

$$P(E_3) = \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} \cdot \frac{1}{37} = \frac{1}{37^3}.$$

La cosa interessante da notare sta nel fatto che, pur essendo ogni lancio indipendente da tutte le altre, e quindi ad ogni giocata la probabilità di successo é *sempre 1/37, la probabilità che un determinato numero non esca mai ad alcuna lancio diminuisce al passare dei lanci. Se nel nostro caso, al terzo tentativo,* $P(E_0) \simeq 0.92109$*, continuando a lanciare, al 15esimo tentativo, tale probabilità diventerebbe circa* 0.66299 *e dopo soli 100 lanci scenderebbe già intorno allo* 0.06457*, e una probabilità circa del* 6% *é da considerare molto bassa.*

Nei modelli come quello descritto nell'esempio precedente, si utilizza sempre lo **Schema di Bernoulli (o Schema successo-insuccesso)**, che quantifica la probabilità di K successi su N prove, e che é una nota distribuzione discreta di probabilità. La formula di Bernoulli tiene anche conto delle varie combinazioni, come quelle che vediamo nei calcoli di $P(E_1)$ e $P(E_2)$, in cui abbiamo tenuto conto dei 3 diversi casi, tra loro incompatibili, di uscita dello 0 (ad esempio, nel caso di E_1, le uscite al primo, secondo o terzo tentativo vanno tutte tenute in conto).

In sintesi, dato una sequenza di N prove ripetute in modo indipendente, e data $p > 0$ la probabilità di successo sulla singola prova, la probabilità $\mathcal{P}$ che ci siano K successi su N prove é la seguente:

$$\mathcal{P} = \binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K}, \tag{8.1.8}$$

dove

$$\binom{N}{K} = \begin{cases} \dfrac{N!}{K!(N-K)!} & \text{se } N \geq K, \\ \\ 0 & \text{se } N < K \end{cases}$$

é il **coefficiente binomiale** N **su** K, e il simbolo ! indica il **fattoriale**: $s! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot s$, per ogni $s \in \mathbb{N}$, e con la notazione $0! = 1$.

Tornando all'esempio della roulette, essendo la probabilità dell'uscita dello 0 nel singolo lancio $p = 1/37$, la probabilità di ottenere 2 successi su 3 lanci, vale a dire la probabilità dell'evento E_2, si può calcolare con la (8.1.8):

$$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{37}\right)^2 \cdot \left(\frac{36}{37}\right)^{3-2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{37^2} \cdot \frac{36}{37} = \frac{108}{37^3}.$$

8.2 Variabili aleatorie

In generale, nei problemi che coinvolgono fenomeni non deterministici vengono considerate delle variabili che sono funzioni del risultato di un evento aleatorio.

Per la definizione di una variabile di questo tipo, che successivamente analizzeremo sia in forma discreta che continua, torniamo ad appoggiarci alla struttura degli spazi di probabilità.

Definizione 139. *Dato uno spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{E}, P)$*, si dice* ***variabile aleatoria (o variabile casuale)*** *una funzione* $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *tale che l'insieme* $\{\omega \mid X(\omega) \leq t\}$ *sia contenuto in* $\mathcal{E}$ *per ogni* $t \in \mathbb{R}$*.*

Una variabile aleatoria, spesso indicata con v.a., é dunque una funzione, definita su tutto l'insieme dei possibili risultati, tale che si possa calcolare la probabilità che essa prenda valori più piccoli di un qualsiasi numero reale t.

In questa maniera, stiamo fornendo una formulazione rigorosa di una funzione che associa dei valori numerici a dei fenomeni aleatori. Il prossimo passo consiste nella distinzione tra v.a. discrete e v.a. continue, tenendo presente che i concetti che caratterizzano sia le une che le altre (distribuzione, valore atteso, varianza, ecc.) sono comuni.

8.2.1 Variabili aleatorie discrete

Consideriamo delle v.a. X che prendano al più un'infinità numerabile di valori $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, e semplifichiamo la notazione precedente omettendo l'argomento di ogni v.a., cioè descriviamo come eventi gli insiemi $\{X = x_i\}$, per ogni i. Dunque, possiamo scrivere, per ogni t reale, l'insieme della definizione precedente come unione al più numerabile di eventi:

$$\{X \leq t\} = \bigcup_{x_i \leq t} \{X = x_i\}.$$

Va notato che, poichè l'applicazione x é ben definita come funzione, tutti gli eventi $\{X = x_i\}$ sono a due a due disgiunti. Di conseguenza, per $t = +\infty$ l'unione degli eventi coincide con tutto Ω.

Il prossimo passo é cruciale, e consiste nel definire la densità di una v.a.:

Definizione 140. *Data una v.a. discreta* X*, la funzione* $p : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ *tale che* $p(x) := P(\{X = x\})$ *é una* ***densità o distribuzione di probabilità*** *se valgono le seguenti proprietà:*

1. $p(x) = 0$ *tranne al più in un'infinità numerabile di valori;*

2. $$\sum_{x \in \mathbb{R}} p(x) = 1.$$

Sulla base di quest'ultima definizione, richiamiamo l'esempio della roulette e costruiamo, grazie allo Schema di Bernoulli, una densità discreta.

Esempio 141. *Supponiamo di lanciare un dado a 6 facce non truccato 5 volte e calcoliamo la probabilità che nei 5 lanci il numero 6 esca almeno 3 volte.*

Costruiamo la v.a. X che conta quante volte esce il numero 6, cioè

$\{X =$ numero di volte che esce il 6 su 5 lanci$\}$. La distribuzione relativa $p(\cdot)$ verrà da uno schema del tipo (8.1.8):

$$P(\{X = K\}) = \binom{5}{K} \left(\frac{1}{6}\right)^K \left(\frac{5}{6}\right)^{5-K}.$$

Notare che gli unici valori che la v.a. X può prendere sono quelli relativi ai successi, cioè al numero di lanci il cui esito é 6, vale a dire 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Per calcolare la probabilità richiesta, la procedura più semplice consiste nel passare per la sua complementare, vale a dire prima calcolare la probabilità che il 6 esca al più 2 volte e poi sottrarla da 1. Si ha:

$$P(\{X \leq 2\}) = \sum_{J=0}^{2} \binom{5}{J} \left(\frac{1}{6}\right)^J \left(\frac{5}{6}\right)^{5-J} = \left(\frac{5}{6}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 +$$

$$+10\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{5^5 + 5 \cdot 5^4 + 10 \cdot 5^3}{6^5} = \frac{2 \cdot 5^4}{6^4}.$$

Passando alla complementare, infine:

$$P(\{X \geq 3\}) = 1 - P(\{X \leq 2\} = \frac{6^4 - 2 \cdot 5^4}{6^4} \simeq 0,035493.$$

La distribuzione di Bernoulli descritta in questo caso é anche detta **legge binomiale** di parametri N (nel nostro caso, 5) e p (nel nostro caso, 1/6) e si indica con la scrittura $B(N, p)$. Alla distribuzione di probabilità, anche nel caso continuo per la verità, é naturalmente legato anche il prossimo concetto:

Definizione 142. *Data una v.a. discreta X, si chiama* ***funzione di ripartizione*** *la funzione $F_X : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ tale che:*

$$F_X(t) = P(\{X \leq t\}) = \sum_{x \leq t} p(x).$$

Quindi, conoscere la distribuzione di probabilità una v.a. equivale in pratica a conoscerne la sua funzione di ripartizione. Alcune proprietà banali della funzione di ripartizione sono:

- $$\lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0;$$
- $$\lim_{t \to +\infty} F_X(t) = 1;$$
- $F_X(t)$ é non-decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

Definizione 143. *Data una v.a. discreta X, con distribuzione $p(\cdot)$, chiamiamo* ***media (o valore atteso o speranza matematica) di*** *X il numero:*

$$E[X] = \sum_i x_i p(x_i) = \sum_i x_i P(\{X = x_i\}). \tag{8.2.1}$$

La formula (8.2.1), in cui la sommatoria viene ovviamente calcolata su tutti i valori x_i presi dalla v.a. X, definisce effettivamente la media della v.a. quando la serie é convergente. Un'ipotesi che tipicamente viene posta prima della definizione é che tale sommatoria converga assolutamente, vale a dire $\sum_i |x_i| p(x_i) < +\infty$.

Enunciamo anche due importanti proprietà della media (la dimostrazione si può trovare su [B], pag. 46):

Proposizione 144. *Se X e Y sono due v.a. con media finita, allora:*

1. *anche la v.a. somma $X + Y$ ha media finita e inoltre:*
$$E[X + Y] = E[X] + E[Y];$$
2. *per qualsiasi $k \in \mathbb{R}$ anche la v.a. kX ha media finita e inoltre:*
$$E[kX] = kE[X].$$

La media é tra gli strumenti matematici più noti ed usati anche nel linguaggio comune, a tutti i livelli. In un certo senso, anche quando da ragazzini calcoliamo la media aritmetica degli N voti di un quadrimestre, non facciamo altro che considerare inconsciamente una distribuzione di probabilità in cui ogni voto incide per un N-esimo, cioè stiamo calcolando la media di una v.a. che ha come determinazioni i singoli voti, ognuno dei quali occorre con probabilità $1/N$.

Un altro concetto fondamentale per le v.a. é quello di varianza, che rappresenta una misura della dispersione della v.a. X attorno al suo valor medio, ossia é tanto più grande quanto più i valori presi da X sono lontani dalla sua media.

Definizione 145. *Data una v.a. discreta X, con media finita, si chiama* ***varianza di X (o momento centrato del secondo ordine di X)*** *il numero:*

$$Var(X) = E[(X - E[X])^2].$$

Inoltre, si chiama ***deviazione standard di*** *X la radice quadrata della sua varianza:*

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)}.$$

La definizione di deviazione standard é ben posta in quanto la varianza di una v.a. é sempre non negativa. Una tipica stima che rappresenta l'interpretazione intuitiva della varianza é la nota **Disuguaglianza di Chebyshev** (per la dimostrazione, vedere ad es. [B], pag. 51). Data una v.a. X e un qualsiasi numero positivo ξ:

$$P(\{|X - E[X]| > \xi\} \leq \frac{\mathrm{Var(X)}}{\xi^2}. \tag{8.2.2}$$

(8.2.2) mette in evidenza che più la varianza é piccola, più é piccola la probabilità che X assuma valori lontani dalla media $E[X]$.

Nel seguente esempio, calcoleremo media, varianza e deviazione standard di una v.a. discreta.

Esercizio 146. ***Alla Festa della Birra della Garbatella si stima che il*** 5% ***dei partecipanti beva 5 birre da 0,40 litri, il*** 20% ***2 birre da 0,40, il*** 45% ***una birra da 0,40, il*** 20% ***una birra da 0,20 e il*** 10%***, che corrisponde ai guidatori delle macchine, non beve nulla. Detta X la v.a. discreta che descrive la quantità di birra bevuta, calcolare il consumo medio, la varianza e la deviazione standard di X.***

Per cominciare, descriviamo la v.a. con tutte le sue possibili determinazioni, trasformando le percentuali date in probabilità in forma di rapporto:

$$X = \begin{cases} x_1 = 2\ l\,; & p(x_1) = 5\% = \dfrac{1}{20}; \\ x_2 = 0.8\ l\,; & p(x_2) = 20\% = \dfrac{1}{5}; \\ x_3 = 0.4\ l\,; & p(x_3) = 45\% = \dfrac{9}{20}; \\ x_4 = 0.2\ l\,; & p(x_4) = 20\% = \dfrac{1}{5}; \\ x_5 = 0\ l\,; & p(x_5) = 10\% = \dfrac{1}{10}. \end{cases}$$

Il consumo medio risulta dunque:

$$E[X] = 2 \cdot \frac{1}{20} + \frac{8}{10} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{10} \cdot \frac{9}{20} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{10} = \frac{12}{25},$$

vale a dire 0.48 litri a persona. Calcoliamo ora la varianza, utilizzando la sua definizione. Bisogna estrapolare tutti gli scarti dei valori presi da X dal valor medio, quadrarli e farne il valor medio utilizzando la stessa distribuzione di probabilità, quindi la v.a. da considerare sarà (omettiamo l'unità di misura):

$$(X - E[X])^2 = \begin{cases} y_1 = \left(\frac{38}{25}\right)^2; & p(y_1) = 5\% = \frac{1}{20}; \\ y_2 = \left(\frac{8}{25}\right)^2; & p(y_2) = 20\% = \frac{1}{5}; \\ y_3 = \left(-\frac{2}{25}\right)^2; & p(y_3) = 45\% = \frac{9}{20}; \\ y_4 = \left(-\frac{7}{25}\right)^2; & p(y_4) = 20\% = \frac{1}{5}; \\ y_5 = \left(-\frac{12}{25}\right)^2; & p(y_5) = 10\% = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

$$Var(X) = \left(\frac{38}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{20} + \left(\frac{8}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{25}\right)^2 \cdot \frac{9}{20} + \left(-\frac{7}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(-\frac{12}{25}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} =$$
$$= \frac{1}{625}\left(\frac{361}{5} + \frac{64}{5} + \frac{9}{5} + \frac{49}{5} + \frac{72}{5}\right) = \frac{111}{625},$$

ossia, in numero decimale, 0,1776. Infine, la deviazione standard, banalmente risulta:

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{0.1776} = 0,421426.$$

Grazie alle suddette proprietà della media, possiamo ricavare un'interessante ed utile formula alternativa per il calcolo della varianza:

$$E[(X - E[X])^2] = E[X^2 - 2XE[X] + (E[X])^2] = E[X^2] - 2E[X]E[X] + (E[X])^2,$$

e sommando gli ultimi 2 termini otteniamo:

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2. \tag{8.2.3}$$

Torniamo brevemente all'esempio precedente e calcoliamone la varianza con la (8.2.3), tenendo presente che la v.a. X^2 ha come determinazioni le x_j^2 con rispettive probabilità $p(x_j)$:

$$Var(X) = 2^2 \cdot \frac{1}{20} + \left(\frac{8}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{10}\right)^2 \cdot \frac{9}{20} + \left(\frac{2}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{5} + 0^2 \cdot \frac{1}{10} - \left(\frac{12}{25}\right)^2 = \frac{111}{625}.$$

Accenniamo ora ad un'altra importante distribuzione, che é tra l'altro utilizzata per approssimare la binomiale e che trova spazio in molti modelli probabilistici, in particolare quelli in cui si ha un grandissimo numero di prove indipendenti e una probabilità di successo piccolissima, vale a dire la **distribuzione di Poisson di parametro** $\lambda > 0$:

$$P(\{X = K\}) = \frac{\lambda^K}{K} e^{-\lambda}.$$

Da notare che il fattore $e^{-\lambda}$ é normalizzante, nel senso che serve a verificare la proprietà 2) della definizione di distribuzione, infatti per il noto sviluppo in serie della funzione esponenziale, valido per ogni esponente positivo, si ha:

$$e^{\lambda} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!} \implies P(\{X \leq +\infty\}) = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{\lambda^K}{K!} e^{-\lambda} = 1.$$

Possiamo infine notare che il parametro λ risulta coincidere sia con il valor medio sia con la varianza di una v.a. distribuita secondo Poisson (quindi al crescere della sua media ne cresce anche la dispersione):

Proposizione 147. *Data la v.a. X con distribuzione di Poisson di parametro λ, la sua media e la sua varianza sono rispettivamente:*

1. $E[X] = \lambda$;
2. $Var(X) = \lambda$.

Dimostrazione. Dimostriamo la 1), tenendo presente la definizione e la formula di media:

$$E[X] = e^{-\lambda} \sum_{K=0}^{\infty} K \frac{\lambda^K}{K!} = e^{-\lambda} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\lambda^K}{(K-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\lambda^{K-1}}{(K-1)!} = \lambda,$$

in quanto l'ultima sommatoria con un cambio di variabile elementare diventa uguale al suddetto sviluppo in serie dell'esponenziale di λ.

Per quanto riguarda la 2), invece, ci conviene usare la formula (8.2.3), già sapendo che $(E[X])^2 = \lambda^2$. Invece, $E[X^2]$ si calcola nel modo seguente:

$$E[X^2] = e^{-\lambda} \sum_{K=0}^{\infty} K^2 \frac{\lambda^K}{K!} = e^{-\lambda} \sum_{K=1}^{\infty} K \frac{\lambda^K}{(K-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{K=1}^{\infty} (K-1+1) \frac{\lambda^K}{(K-1)!} =$$

$$= e^{-\lambda} \left(\sum_{K=2}^{\infty} \frac{\lambda^K}{(K-2)!} + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\lambda^K}{(K-1)!} \right) = e^{-\lambda} \left(\lambda^2 \sum_{K=2}^{\infty} \frac{\lambda^{K-2}}{(K-2)!} + \right.$$

$$\left. + \lambda \sum_{K=1}^{\infty} \frac{\lambda^{K-1}}{(K-1)!} \right) = e^{-\lambda} (\lambda^2 + \lambda) e^{\lambda} = \lambda^2 + \lambda,$$

avendo usato 2 volte lo stesso metodo del punto 1). Per concludere, applichiamo (8.2.3):

$$\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

Come abbiamo visto in precedenza, il calcolo della media di una v.a. somma di due v.a. é immediato, quando esse hanno entrambe media finita, per una semplice proprietà di linearità. Ben maggiori sono le complicazioni che dobbiamo affrontare per il calcolo della varianza di una somma di v.a. del tipo $X + Y$; proviamo a seguire una strada standard:

$$E\left[(X + Y - E[X + Y])^2\right] = E\left[((X - E[X]) + (Y - E[Y]))^2\right] =$$

$$= E\left[(X - E[X])^2\right] + E\left[(Y - E[Y])^2\right] + 2E[(X - E[X])(Y - E[Y])],$$

e nell'ultima espressione compaiono come addendi la varianza di X, quella di Y, e infine un nuovo termine che inevitabilmente dipende da entrambe le variabili.

Definizione 148. *Date 2 v.a. X e Y, si definisce* ***covarianza di X e Y*** *il numero:*

$$Cov(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])].$$

Con questa nuova definizione, possiamo scrivere in modo completo la varianza di $X + Y$:

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, Y).$$

Risolviamo un esercizio calcolando varianze e covarianze.

Esercizio 149. ***Date le 2 seguenti variabili aleatorie discrete:***

$$X = \begin{cases} x_1 = 10, & p(x_1) = 3/4 \\ x_2 = 20, & p(x_2) = 1/8 \\ x_3 = -30, & p(x_3) = 1/8 \end{cases} , \qquad Y = \begin{cases} y_1 = 8, & p(y_1) = 1/4 \\ y_2 = -4, & p(y_2) = 5/8 \\ y_3 = -12, & p(y_3) = 1/8, \end{cases}$$

sotto l'ipotesi che X e Y siano indipendenti, calcolarne medie, varianze, covarianza e infine media e varianza della v.a. $X + Y$.

Cominciamo dalle medie, che sono elementari:

$$E[X] = 10 \cdot \frac{3}{4} + 20 \cdot \frac{1}{8} - 30 \cdot \frac{1}{8} = 6,25.$$

$$E[Y] = 8 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{5}{8} - 12 \cdot \frac{1}{8} = 2 - 2,5 - 1,5 = -2.$$

Le varianze sono invece rispettivamente date da:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = 100 \cdot \frac{3}{4} + 400 \cdot \frac{1}{8} + 900 \cdot \frac{1}{8} - 39,0625 = 198,4735.$$

$$Var(Y) = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 64 \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \frac{5}{8} + 144 \cdot \frac{1}{8} - 4 = 40.$$

Consideriamo ora la v.a. $X + Y$, di cui dobbiamo ricavare la densità di probabilità. I valori presi da $X + Y$, che chiamiamo z_i, sono tutte le possibili somme tra i valori di X e quelli di Y, ossia i seguenti:

$$X + Y = Z = \begin{cases} z_1 = x_1 + y_1 = 18, & p(z_1) = 3/16 \\ z_2 = x_1 + y_2 = 6, & p(z_2) = 15/32 \\ z_3 = x_1 + y_3 = -2, & p(z_3) = 3/32 \\ z_4 = x_2 + y_1 = 28, & p(z_4) = 1/32 \\ z_5 = x_2 + y_2 = 16, & p(z_5) = 5/64 \\ z_6 = x_2 + y_3 = 8, & p(z_6) = 1/64 \\ z_7 = x_3 + y_1 = -22, & p(z_7) = 1/32 \\ z_8 = x_3 + y_2 = -34, & p(z_8) = 5/64 \\ z_9 = x_3 + y_3 = -42, & p(z_9) = 1/64, \end{cases} .$$

La media di $X + Y$ é data da:

$$E[X + Y] = 18 \cdot \frac{3}{16} + 6 \cdot \frac{15}{32} - 2 \cdot \frac{3}{32} + 28 \cdot \frac{1}{32} + 16 \cdot \frac{5}{64} +$$

$$+8 \cdot \frac{1}{64} - 22 \cdot \frac{1}{32} - 34 \cdot \frac{5}{64} - 42 \cdot \frac{1}{64} = 4,25.$$

Da notare che, come sapevamo, $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$. Invece la $Var(X+Y)$ é data da:

$$Var(X + Y) = 324 \cdot \frac{3}{16} + 36 \cdot \frac{15}{32} + 4 \cdot \frac{3}{32} + 784 \cdot \frac{1}{32} + 256 \cdot \frac{5}{64} +$$

$$+64 \cdot \frac{1}{64} + 484 \cdot \frac{1}{32} + 1.156 \cdot \frac{5}{64} + 1.764 \cdot \frac{1}{64} - (4,25)^2 = 238,4375.$$

Infine, invertendo la formula della covarianza, si ha:

$$Cov(X, Y) = \frac{Var(X + Y) - Var(X) - Var(Y)}{2} = \frac{238,4375 - 198,4375 - 40}{2} = 0,$$

cosa che già sapevamo dall'inizio perché le 2 v.a. sono indipendenti.

Da notare che, quando le variabili aleatorie non sono indipendenti, invece, bisogna conoscere la densità congiunta delle v.a. (rimandiamo al testo di Baldi [B] per ulteriori nozioni).

La covarianza é un concetto rilevante: possiamo dimostrare che se essa é uguale a 0, le v.a. X e Y sono indipendenti, ma inoltre quanto più essa é prossima allo 0, tanto meno X e Y dipendono l'una dall'altra. Se poi la covarianza é positiva, esse aumentano o diminuiscono all'unisono, mentre se é negativa, all'aumentare dell'una l'altra tende a diminuire e viceversa. In generale, definiamo a questo scopo un ulteriore coefficiente:

Definizione 150. *Date le v.a. X e Y con deviazioni standard σ_X e σ_Y, si chiama **coefficiente di correlazione** il numero seguente:*

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Il problema della correlazione tra v.a. diventerà particolarmente importante nell'ambito dell'ottimizzazione di portafoglio a più titoli rischiosi. In sintesi, descritto ogni titolo come v.a. il cui rendimento é rappresentato dalla sua media e il cui rischio é invece misurato dalla sua varianza, nei problemi di scelta di portafoglio dovremo anche descrivere la dipendenza di ogni titolo da ogni altro. Per questo, faremo uso di una matrice quadrata simmetrica sulla cui diagonale avremo le varianze dei singoli titoli e nel posto (i, j) la covarianza tra l'i-esimo ed il j-esimo titolo.

Definizione 151. *Date N v.a. $X_1, \ldots, X_N$, si chiama **matrice di covarianza (o delle varianze/covarianze)** la matrice*

$$C = (c_{ij}) = (Cov(X_i, X_j)) \in M_N(\mathbb{R}).$$

La matrice delle varianze/covarianze é simmetrica e definitia positiva, vale a dire ha tutti autovalori reali positivi, e come tutte le matrici di questo tipo si può associare ad una forma quadratica definita positiva che, in funzione della quantità dei singoli titoli, esprime la varianza (e quindi quantifica il rischio) dell'intero portafoglio. Un tipico problema di scelta di portafoglio consiste proprio nel determinarne quello di minimo rischio.

8.2.2 Variabili aleatorie continue

Nella teoria delle v.a. continue si ritrovano i concetti già visti per le v.a. discrete, a parte alcune differenze tecniche, che sono le tipiche differenze che intercorrono tra la matematica del discreto e quella del continuo. In particolare, le sommatorie vengono sostituite dagli integrali, le densità sono funzioni continue, e via dicendo.

Definizione 152. *Una funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice una* ***densità (o legge)*** *se valgono le seguenti proprietà:*

1. $f(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$;
2. $f(x)$ *é integrabile su tutto* $\mathbb{R}$;
3. $$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

Definizione 153. *Data la v.a. X con funzione di ripartizione $F(x)$, diremo che X ha densità $f(x)$ se F é primitiva di f, ossia:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

o, equivalentemente, se

$$P(\{X \leq k\}) = F(k) = \int_{-\infty}^{k} f(t)dt.$$

Di conseguenza, la probabilità che X assuma valori compresi in un dato intervallo $[a, b]$ si ricava semplicemente dalle proprietà degli integrali:

$$P(\{a \leq X \leq b\}) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt.$$

Esempio 154. *La più semplice tra le densità delle v.a. continue é la cosiddetta distribuzione uniforme, definita dalla funzione:*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & se \ t \in (0, 1) \\ 0 & se \ \ t \leq 0 \ \ oppure \ t \geq 1 \end{cases} \quad . \tag{8.2.4}$$

Evidentemente, (8.2.4) verifica tutte le ipotesi della definizione di densità, e in particolare é integrabile anche se discontinua in un numero finito di punti (due).

Quindi, ogni v.a. X distribuita uniformemente é tale che, per ogni a, $b \in [0, 1]$ si ha:

$$P(\{a \leq X \leq b\}) = \int_{a}^{b} dt = b - a.$$

La sua cosiddetta uniformità deriva dal fatto che la probabilità che X prenda valori in un dato intervallo dipende solo dall'ampiezza di quell'intervallo e non da dove esso si trova.

Definizione 155. *Data una v.a. X continua, di densità $f(\cdot)$, si dice che X ha media finita se e solo se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x) dx < +\infty.$$

Definizione 156. *Se X ha media finita, si chiama* ***media (o valore atteso o speranza matematica)*** *di X il numero:*

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx. \tag{8.2.5}$$

Fondamentalmente, tutte le proprietà della media di una v.a. discreta si ripropongono nella teoria delle v.a. continue, quindi la media di una somma di 2 v.a. é la somma delle medie, e via dicendo. Se poi anche la v.a. $(X - E[X])^2$ ha media finita, possiamo ridefinire anche la varianza, utilizzando la stessa legge $f(x)$:

Definizione 157. *Si chiama* ***varianza*** *della v.a. continua X il seguente integrale:*

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx. \tag{8.2.6}$$

E inoltre, vale anche qui la formula (8.2.3). Più complessa risulta invece la trattazione del prodotto di v.a. e della covarianza, per cui servono gli integrali doppi, e che qui non sarà affrontata.

Esempio 158. *Consideriamo una v.a. continua X distribuita secondo una nuova densità detta* ***densità esponenziale di parametro*** *λ, definita da:*

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & se \;\; t > 0 \\ 0 & altrimenti \end{cases} . \tag{8.2.7}$$

Quindi, possiamo schematizzare la ripartizione di X in questo modo:

$$Pr(\{X \leq k\}) = F(k) = \int_{-\infty}^{k} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_{0}^{k} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

Calcoliamo la media di X, applicando la formula (8.2.5) e usando l'integrazione per parti:

$$E[X] = \lambda \int_{0}^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(\left[x \cdot \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 1 \cdot \left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right) dx \right) =$$

$$= \lambda \left([0 - 0] - \left[\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \right]_0^{+\infty} \right) = \frac{1}{\lambda}.$$

Calcoliamo ora la varianza di X, usando la formula (8.2.3), dopo aver ricavato che

$$E[X^2] = \lambda \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x} dx = \lambda \left(\left[\frac{x^2 \cdot e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} dx \right) =$$

$$= \lambda \left([0 - 0] + \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx \right) = \lambda \cdot \frac{2}{\lambda^3} = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Applicando (8.2.3), otteniamo:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

La densità esponenziale é particolarmente indicata nelle applicazioni in cui si deve modellizzare la durata di vita degli organismi biologici, e quindi anche delle persone, o il tempo di affidabilità di lungo periodo nei sistemi meccanici.

In particolare, in Matematica Attuariale, possiamo costruire una teoria probabilistica generale per la durata di vita che permetta di valutare i premi, le prestazioni, le riserve tecniche e tutto quanto riguarda i modelli assicurativi.

Definizione 159. *Considerando una variabile aleatoria continua di durata di vita (o alternativamente, di tempo di morte) T, e la sua funzione di ripartizione $F(t) = Pr(\{T \leq t\})$, si chiama **funzione di sopravvivenza** $S(t)$ la sua complementare:*

$$S(t) = 1 - F(t) = Pr(\{T > t\}).$$

Da questa definizione, si possono derivare una serie di ulteriori quantià che possono essere utili nell'analisi di sopravvivenza, ad esempio la probabilità che un individuo sia ancora in vita alla data $t_1 + t_2$, sotto l'ipotesi che abbia vissuto fino al tempo t_1.

Definizione 160. *La **probabilità di morte entro il tempo** $t_1 + t_2$ é data da:*

$$Pr(\{T \leq t_1 + t_2 \mid T > t_1\}) = \frac{Pr(\{t_1 < T \leq t_1 + t_2\})}{Pr(\{T > t_1\})} = \frac{S(t_1) - S(t_1 + t_2)}{S(t_1)}.$$

Usando la relazione precedente, e passando alla densità di probabilità, possiamo anche definire il valore atteso della v.a. durata di vita, da un certo istante in poi.

Definizione 161. *Si chiama* ***durata attesa di vita dal tempo*** t_1 ***in avanti*** *l'integrale:*

$$E_{t_1}[T] = \frac{1}{S(t_1)} \int_0^{+\infty} t f(t+t_1) dt.$$

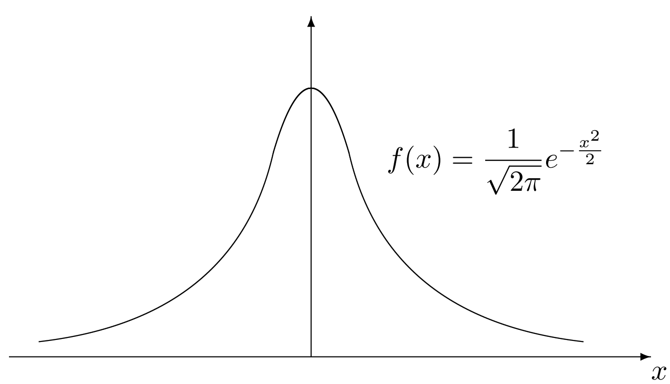
Altre densità variamente usate nell'analisi di sopravvivenza, dipendenti da altri parametri significativi, sono la distribuzione di Weibull ($f(t) = e^{-\lambda t^\gamma}$) e quella di Gompertz ($f(t) = e^{\frac{\lambda}{\theta}(1-e^{\theta t})}$). Infine, dobbiamo ricordare naturalmente la normale di Gauss, che é la maggiormente usata per schematizzare le distribuzioni di popolazioni.

Esempio 162. *Una delle più note ed importanti distribuzioni di probabilità, di cui si fa larghissimo uso nelle Scienze Sociali, nelle Scienze Naturali, ecc., é la* ***distribuzione normale (o Gaussiana)****, di media μ e varianza σ^2, la cui densità é data da una funzione a campana (questa forma si ripropone anche in più variabili):*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Il caso più semplice é la ***normale standard*** *con media nulla e varianza unitaria:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$



Gaussiana ad 1 variabile di media nulla e varianza uguale a 1

Quando una v.a. continua é distribuita normalmente, si usa la notazione rapida: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Esercizio 163. ***Data la funzione definita da:***

$$f(t) = \begin{cases} kt^3 e^{-t/2} & \textbf{\textit{se}} \quad t \geq 0 \\ 0 & \textbf{\textit{altrimenti}} \end{cases} \quad ,$$

dire per quale $k \in \mathbb{R}$ ***essa rappresenta una densità di probabilità e, per tale*** k***, calcolare la media e la varianza di una v.a. continua distribuita secondo questa legge.***

Affinchè $f(t)$ *sia una densità, deve essere nonnegativa, e su* $t \geq 0$ *lo é per ogni* $k \geq 0$*, inoltre il suo integrale deve essere uguale ad 1, vale a dire:*

$$\int_0^{+\infty} kt^3 e^{-t/2} dt = 1 \iff [-2t^3 e^{-t/2}]_0^{+\infty} + 6 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t/2} dt = \frac{1}{k} \iff$$

$$\iff [-2t^2 e^{-t/2}]_0^{+\infty} + 4 \int_0^{+\infty} t e^{-t/2} dt = \frac{1}{6k} \iff \ldots \iff k = \frac{1}{96}.$$

Sempre poi utilizzando l'integrazione per parti analogamente, si possono calcolare gli altri valori richiesti, sostituendo la k *trovata, di una qualsiasi v.a.* X *la cui legge sia* $f(t)$*:*

$$E[X] = \frac{1}{96} \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t/2} dt,$$

$$Var(X) = \frac{1}{96} \int_0^{+\infty} (t - E[X])^2 \cdot t^3 e^{-t/2} dt.$$

Lascio questi semplici ma piuttosto noiosi calcoli alle lettrici e ai lettori.

Capitolo 9

Introduzione alle opzioni finanziarie

Tra i *contratti (o prodotti finanziari) derivati*, ossia il cui valore deriva dal valore di un ulteriore bene (un indice, un titolo, ecc.), quella comunemente considerata più semplice é la cosiddetta **opzione**, che consiste in un tipo di contratto che conferisce al possessore il diritto (ma non l'obbligo) di acquistare o vendere un determinato titolo in una certa scadenza. Per la precisione, le opzioni europee, le uniche che descriveremo in questo Capitolo, stabiliscono una data precisa per l'esercizio dell'opzione, mentre quelle di tipo americano si possono esercitare entro una data stabilita. Si dice che l'opzione é scritta su quel titolo, chiamato **sottostante**. Prima di addentrarci nella trattazione, ricordiamo che il tema delle opzioni finanziarie, in particolare della loro valutazione o *pricing*, ha rappresentato e tuttora rappresenta uno dei più rilevanti argomenti di ricerca nella Finanza Matematica da oltre 30 anni, oltre ad essere una competenza fondamentale per qualunque operatore o consulente finanziario.

Distinguiamo prima di tutto due diversi tipi di opzione (un sintetico riassunto dei concetti principali si può trovare sulla pagina [O], mentre per una lettura molto più tecnica e matematicamente approfondita si consiglia [PR]):

- **opzione call**: dà al possessore dell'opzione il diritto di comprare una o più azioni del titolo sottostante;

- **opzione put**: dà al possessore dell'opzione il diritto di vendere una o più azioni del titolo sottostante;

Gli elementi fondamentali di una operazione con un'opzione sono: il **prezzo d'acquisto** C_0 per la call (P_0 per la put), il **prezzo d'esercizio (strike price)** k_C per la call (k_P per la put), e il valore del titolo sottostante alla scadenza del contratto, generalmente indicato con una variabile aleatoria, ad esempio V. Al solito, va stabilita naturalmente anche una durata del contratto, ma per semplificare l'esposizione la considereremo equivalente a un periodo unitario (come fosse tra l'istante 0 e l'istante 1). Brevemente, possiamo schematizzare i funzionamenti delle due tipologie di opzione. Potremo notare che, in un certo senso, tra di esse vige una sorta di simmetria.

Opzione call:

1. se al tempo finale il corso dell'azione sottostante é maggiore del prezzo d'esercizio, vale a dire $V > k_C$, il possessore ha convenienza ad esercitare l'opzione. Infatti, comprando il titolo sottostante può immediatamente rivenderlo al prezzo corrente V, e guadagnare quindi $V - k_C - C_0$ da tutta l'operazione (C_0 é il prezzo di acquisto iniziale), sempre se tale quantità é positiva.

   Simmetricamente, chi ha emesso la call, subisce una perdita, in quanto deve acquistare un'azione al prezzo corrente V e venderla al prezzo di esercizio k_C, perdendo in tutta l'operazione lo stesso ammontare $V - k_C - C_0$. Da notare che la perdita dell'ente emittente si può anche considerare come un mancato guadagno: acquistando un'azione al prezzo V e dovendola poi vendere al prezzo k_C, perde la possibilità di venderla a un prezzo maggiore;

2. se al tempo finale il corso dell'azione sottostante non é maggiore del prezzo d'esercizio, vale a dire $V \leq k_C$, l'esercizio dell'opzione non é conveniente, in pratica essa non vale nulla, in quanto l'acquisto del titolo sottostante al prezzo di mercato é equivalente o addirittura più conveniente dell'esercizio dell'opzione. Naturalmente, il prezzo di acquisto della call, C_0 é stato pagato all'inizio e non viene rimborsato. Per chi ha emesso la call, senza l'esercizio di questa, c'é quindi un guadagno netto di C_0 euro;

3. possiamo dunque sintetizzare il valore della call con la seguente formula:

   $$\max\{0,\ V - k_C\},$$

   dove con l'operatore max si intende il valore massimo tra i valori di un insieme, in questo caso costituito da soli 2 elementi.

Opzione put:

1. se al tempo finale il corso dell'azione sottostante é maggiore o uguale del prezzo di esercizio, vale a dire $V \geq k_P$, non é conveniente esercitare l'opzione. Infatti, conviene di più venderla sul mercato al prezzo corrente V e di conseguenza in pratica non vale nulla e il suo prezzo di acquisto P_0 risulta

una perdita per chi l'ha comperata. Al contrario, chi ha emesso l'opzione ha ricavato un guadagno netto di P_0;

2. se al tempo di fine contratto il corso dell'azione sottostante é minore del prezzo d'esercizio, quindi $V < k_P$, allora conviene esercitare l'opzione, in quanto comprando sul mercato un'azione al prezzo corrente V, potrà immediatamente rivenderla al prezzo d'esercizio k_P, e lucrare un guadagno di $k_P - V - P_0$, corrispondente alla perdita del soggetto che ha invece emesso l'opzione put;

3. analogamente alla call, possiamo dunque sintetizzare il valore della put con la seguente formula:
$$\max\{0,\ k_P - V\}\,.$$

Questa semplice panoramica ci suggerisce le motivazioni per cui questi tipi di contratti sono effettivamente nati, e cioè per scopi di copertura degli investitori sul mercato finanziario. Se un investitore vuole comprare o vendere un titolo, in condizioni (normali) di incertezza sull'andamento di quel titolo, può utilizzare lo strumento opzione per trattarlo indipendentemente dal suo andamento di prezzo, in un istante stabilito.

Se vorrà comprarlo in quell'istante, l'aver acquistato una call gli permetterà di comprarlo a un prezzo prestabilito, quindi lo metterà al riparo da una spesa eccessiva se nel frattempo il titolo sarà aumentato molto.

Se invece vorrà venderlo in quell'istante, il possesso di una put gli permetterà di vendere il titolo a un prezzo prestabilito anche se nel frattempo il valore del titolo sarà diminuito considerevolmente.

Nel seguito presentiamo quello che é considerato il più semplice tra i modelli di valutazione delle opzioni.

9.1 Il modello binomiale: caso uniperiodale

La trattazione del modello binomiale (anche detto **BOPM**, **Binomial Options Pricing Model**), come al solito, sarà ridotta ai concetti fondamentali, con una notazione molto semplificata (per ulteriori dettagli si consulti [BE]). L'idea di base é quella di valutare, o prezzare, un'opzione call tenendo conto dei possibili effetti di mercato su un titolo sottostante.

Considereremo il modello uniperiodale, per cui supponiamo di considerare soltanto un periodo che intercorre tra la scrittura del contratto e la scadenza dello stesso contratto. Chiamiamo V_0 il valore iniziale di una determinata azione, che alla fine del periodo potrà valere alternativamente $V_u = V_0(1 + u)$, dove l'indice u significa 'up' e denota l'aumento del valore, oppure $V_d(1 + d)$, dove l'indice

d significa invece 'down' e denota la diminuzione del valore. Chiaramente, per rendere bene il significato finanziario, dovremo considerare $u > 0$ e $d < 0$, quindi evidentemente sempre $u > d$.

Consideriamo ora un'opzione call scritta sul titolo, con prezzo d'esercizio k_C. Di questa call già sappiamo il valore, che infatti sarà $C_u = \max\{0,\ V_u - k_C\}$ se il valore del titolo é aumentato, $C_d = \max\{0,\ V_d - k_C\}$ se invece il valore é diminuito.

Supponiamo ora di conoscere il cosiddetto **tasso privo di rischio** (o **risk-free rate**), quel tasso che permette un impiego senza rischi dei propri capitali nel mercato, e chiamiamolo i^*. Questo tasso si può considerare una variabile aleatoria a varianza nulla e media costante, e un'interpretazione corrente é che i^* é il tasso di rendimento che qualsiasi investitore si aspetta da un investimento completamente privo di rischio (possiamo pensare ad esempio a un investimento in Titoli di Stato di uno Stato che abbia una probabilità di default prossima allo 0, ad esempio un 'tripla A'). Se costruiamo un portafoglio con h azioni del tipo suddetto e con una opzione call a debito, il valore totale del portafoglio sarà:

- $hV_0(1 + u) - C_u$ in caso di aumento del valore del titolo;
- $hV_0(1 + d) - C_d$ in caso di sua diminuzione.

Cerchiamo il numero h di azioni da acquistare affinchè il valore del portafoglio sia lo stesso in entrambi i casi. Imponendo l'uguaglianza dei due valori, otterremo:

$$hV_0(1 + u) - C_u = hV_0(1 + d) - C_d \iff \cdots \iff h = \frac{C_u - C_d}{V_0(u - d)},$$

ben definito in quanto abbiamo assunto che $u > d$. Questo valore di h é detto **rapporto di copertura** (o **hedge ratio**), e consiste nel numero di azioni da acquistare in modo che il portafoglio abbia lo stesso valore qualunque sia l'andamento dell'azione nel mercato. Va notato che, quando sia C_u che C_d sono diversi da 0, al numeratore il rapporto $C_u - C_d$ equivale a

$$V_u - k_C - V_d + k_C = V_u - V_d = V_0(u - d),$$

e in questo caso $h = 1$, quindi il possesso di un'unica azione é sufficiente per la copertura. Quando invece sono entrambi uguali a 0, e cioè il prezzo di esercizio é superiore a entrambi i valori finali possibili per il titolo, come detto in precedenza la call non vale nulla, e la condizione che abbiamo imposto é un'equazione senza soluzioni in h, per cui non esiste un numero possibile di azioni che possano coprire l'investitore.

Al di fuori di questi casi specifici, con questa quantità di azioni e una call, il portafoglio risulta perfettamente coperto, e di conseguenza crescerà con il fattore di capitalizzazione interperiodale dato dal tasso privo di rischio, quindi $1 + i^*$. Pertanto, se chiamiamo C il valore della call, il valore iniziale del portafoglio, capitalizzato per un periodo, dovrà essere uguale a quello finale nel caso di aumento del titolo da cui:

$$(hV_0 - C)(1+i^*) = hV_0(1+u) - C_u \iff hV_0 i^* - C(1+i^*) = hV_0 u - C_u \iff$$

$$\iff \frac{C_u - C_d}{u-d} i^* - C(1+i^*) = \frac{C_u - C_d}{u-d} u - C_u \iff$$

$$\iff C(1+i^*) = \frac{C_u - C_d}{u-d}(i^* - u) + C_u \iff$$

$$\iff C = (1+i^*)^{-1} \left(\frac{C_u(i^* - d) + C_d(u - i^*)}{u-d} \right),$$

da cui, in definitiva, emerge una scomposizione additiva del valore della call, ossia

$$C = \frac{1}{1+i^*} \left(C_u \frac{i^* - d}{u-d} + C_d \frac{u - i^*}{u-d} \right). \tag{9.1.1}$$

In altre parole, C é il valore attuale di una media pesata dei possibili valori della call al tempo finale, una sorta di 'valore attuale medio', secondo una distribuzione di probabilità discreta in cui $p = \dfrac{i^* - d}{u-d}$ é la probabilità che il corso dell'azione salga e $1 - p = \dfrac{u - i^*}{u-d}$ é la probabilità che il corso scenda (la dimostrazione che questi valori verificano le proprietà di una distribuzione di probabilità discreta é immediata).

Risulta abbastanza immediato anche ricavare il valore analogo nel caso di una opzione put, tenendo a mente che nel caso della put la copertura avviene non comprando, ma vendendo un certo numero di azioni corrispondente al rapporto di copertura. Ripercorrendo il ragionamento, otterremo che:

$$P = \frac{1}{1+i^*} \left(P_u \frac{i^* - d}{u-d} + P_d \frac{u - i^*}{u-d} \right).$$

Va ricordato, infine, come ad ogni istante, sussista una **relazione di parità call-put** che é anch'essa un requisito fondamentale affinchè non si possano effettuare manovre di arbitraggio: se i prezzi di esercizio sono uguali ($k_C = k_P = k$), detto V_0 il valore del titolo al tempo iniziale, avremo:

$$V_0 + P - C = k,$$

facilmente verificabile quando i valori sono quelli ammissibili (ad esempio, se $P = 0$, allora $C = k - V_0$, eccetera).

Esercizio 164. ***Consideriamo il titolo azionario Grandi Viaggi (realmente esistente) e supponiamo che il suo valore iniziale, ossia all'istante di costruzione di un portafoglio, sia di 200 euro. Nel portafoglio, mettiamo un certo numero*** h ***di azioni Grandi Viaggi ed una call il cui prezzo di esercizio alla scadenza del contratto é di 195 euro. Sapendo che il tasso risk-free di mercato corrisponde all'***$1,1\%$***, che al tempo finale l'azione potrà aumentare dell'***$1,9\%$ ***oppure diminuire del*** $2,9\%$***, calcoliamo il numero di azioni per realizzare la copertura del portafoglio e il valore della call relativa. Infine, calcoliamo il valore dell'opzione put simmetrica, avente lo stesso prezzo d'esercizio della call.***

Ricordando le formule viste in precedenza, i valori dati sono $u = 0,019$, $i^* = 0,011$, $d = -0,029$, $V_0 = 200$, $k_C = 195$. *Calcoliamo preliminarmente i valori all'istante finale del titolo:*

$$V_u = 200(1 + 0,019) = 203,8 \text{ euro}, \qquad V_d = 200(1 - 0,029) = 194,2 \text{ euro},$$

e di conseguenza $C_u = 203,8 - 195 = 8,8$, *mentre* $C_d = 0$ *in quanto* $V_d < k_C$. *Il rapporto di copertura* h *quindi risulta:*

$$h = \frac{C_u - C_d}{V_0(u - d)} = \frac{8,8 - 0}{200(0,019 + 0,029)} = 0,91\overline{6}.$$

Se vogliamo utilizzare solo quantità intere di azioni, essendo $0,91\overline{6}$ *il rapporto di copertura, possiamo dire che servirà almeno una azione del titolo Grandi Viaggi da mettere in portafoglio per considerarsi coperti. Le rispettive probabilità di aumento e di diminuzione del titolo sono date da:*

$$p = \frac{i^* - d}{u - d} = \frac{0,04}{0,048} = 83,\overline{3}\%, \qquad 1 - p = \frac{u - i^*}{u - d} = \frac{0,008}{0,048} = 16,\overline{6}\%.$$

Per concludere, il valore della call sarà quindi dato da:

$$C = \frac{1}{1,011}(8,8 \cdot 0,8333 + 0 \cdot 0,1666) = 7,253 \text{ euro}.$$

Infine, dalla relazione di parità call-put otteniamo pure il valore della put simmetrica:

$$P = k_C + C - V_0 = 195 + 7,253 - 200 = 2,253 \text{ euro}.$$

9.2 Il modello binomiale: caso biperiodale

L'estensione del modello a un caso con un ulteriore periodo é piuttosto immediata. Supponiamo di avere sempre gli stessi dati di partenza, ma che al periodo successivo per il titolo sottostante ci possa essere ancora un aumento, sempre indicato da u, oppure una diminuzione, sempre con parametro d. Quindi i 3 valori possibili alla fine del secondo periodo sono i seguenti:

$$V_{uu} = V_0(1+u)^2, \qquad V_{ud} = V_0(1+u)(1+d), \qquad V_{dd} = V_0(1+d)^2.$$

Considerando sempre il prezzo d'esercizio a fine del secondo periodo, possiamo dedurre i valori dell'opzione call scritta sul titolo sottostante nei vari casi, quindi C_{uu}, C_{ud} e C_{dd}.

In particolare, essendo sempre i^* il tasso privo di rischio, iterando la formula (9.1.1) per il secondo periodo avremo:

$$C_u = \frac{1}{1+i^*}\left(C_{uu}\frac{i^*-d}{u-d} + C_{ud}\frac{u-i^*}{u-d}\right),$$

$$C_d = \frac{1}{1+i^*}\left(C_{du}\frac{i^*-d}{u-d} + C_{dd}\frac{u-i^*}{u-d}\right),$$

e ricordando che $C_{ud} = C_{du}$ possiamo ricavare il valore dell'opzione call:

$$C = \frac{1}{1+i^*}\left(C_u\frac{i^*-d}{u-d} + C_d\frac{u-i^*}{u-d}\right) = \frac{1}{1+i^*}\left[\frac{1}{1+i^*}\left(C_{uu}\frac{i^*-d}{u-d} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + C_{ud}\frac{u-i^*}{u-d}\right)\frac{i^*-d}{u-d} + \frac{1}{1+i^*}\left(C_{du}\frac{i^*-d}{u-d} + C_{dd}\frac{u-i^*}{u-d}\right)\frac{u-i^*}{u-d}\right] =$$

$$= \frac{1}{(1+i^*)^2}\left[C_{uu}\left(\frac{i^*-d}{u-d}\right)^2 + 2C_{ud}\frac{(u-i^*)(i^*-d)}{(u-d)^2} + C_{dd}\left(\frac{u-i^*}{u-d}\right)^2\right].$$

Tornando a usare la notazione del caso uniperiodale, possiamo scrivere:

$$C = \frac{1}{(1+i^*)^2}\left[p^2 C_{uu} + 2p(1-p)C_{ud} + (1-p)^2 C_{dd}\right],$$

esattamente come una distribuzione di probabilità discreta di tipo binomiale. Infatti, é immediato provare che p^2, $p(1-p)$, $(1-p)^2$ sono tutte positive e che la loro somma é uguale a 1:

$$p^2 + 2p - 2p^2 + 1 - 2p + p^2 = 1.$$

Il metodo può essere ulteriormente esteso a un numero ancora maggiore di periodi, iterando il procedimento, e la formula generale su N periodi sarà data dalla distribuzione binomiale. Il modo più semplice di scriverne la formula si basa sul valore della call nel caso up:

$$C = \frac{1}{(1+i^*)^N}\sum_{K=0}^{N}\binom{N}{K} p^K (1-p)^{N-K} C_u.$$

Esempio 165. ***Calcolare il valore di una call scritta su un titolo su 4 periodi, con tasso risk-free*** $i^* = 0,06$***, probabilità di aumento*** $p = 0,47$***, valore dell'opzione in caso di aumento*** $C_u = 10$ ***euro.***

Applicando la formula, avremo:

$$C = (1,06)^{-4}\left[\frac{4!}{0!\cdot 4!}(0,47)^4\cdot(0,53)^0+\frac{4!}{1!\cdot 3!}(0,47)^3\cdot(0,53)^1+\right.$$

$$\left.+\frac{4!}{2!\cdot 2!}(0,47)^2\cdot(0,53)^2+\frac{4!}{3!\cdot 1!}(0,47)^1\cdot(0,53)^3+\frac{4!}{0!\cdot 4!}(0,47)^0\cdot(0,53)^4\right]\cdot 10=$$

$$= 0,792\cdot[0,048+0,22+0,372+0,279+0,078]\cdot 10 = 7,896 \text{ } euro.$$

Bibliografia consigliata

[B] Paolo Baldi, *Calcolo delle Probabilità e Statistica*, Milano, McGraw-Hill Libri Italia (1998).

[BDI] Banca d'Italia, Statistiche sulla Finanza Pubblica, $http://www.bancaditalia.it/statistiche/finpub.$

[BE] Fabio Bellini, sito docente UNIMIB, dispense sul Modello Binomiale, $www.economia.unimib.it/DATA/moduli/8_7236/materiale/modellobinomiale.pdf$

[DD] Luciano Daboni, Claudio De Ferra, *Elementi di Matematica Finanziaria*, Trieste, Edizioni LINT (1987).

[DT] Dipartimento del Tesoro, $http://www.dt.tesoro.it/$.

[JMV] Jacques Janssen, Raimondo Manca, Ernesto Volpe di Prignano, *Finanza Matematica Volume 1*, Giappichelli (2012).

[LR] Ester Lari, Marina Ravera, *Matematica Finanziaria. esercizi*, Pearson Italia, Milano-Torino (2013).

[M] Franco Moriconi, *Matematica Finanziaria*, Bologna, Il Mulino (1994).

[N] Carl J. Norstrøm, *A Sufficient Condition for a Uniform Nonnegative Internal Rate of Return*, Journal of Financial and Quantitative Analysis (June 1972), pp. 1835-1839.

[O] *Opzione (finanza)*, Wikipedia, $http://it.wikipedia.org/wiki/Opzione_(finanza)$.

[PR] Andrea Pascucci, Wolfgang Runggaldier, *Finanza Matematica*, Milano, Springer Italia (2009).

[R] Daniele Ritelli, *Matematica Finanziaria*, Bologna, Società Editrice Esculapio (2013).

[S1] Giacomo Scandolo, *Matematica finanziaria*, Padova, Amon Edizioni (2013).

[S2] Giacomo Scandolo, *Matematica finanziaria, Esercizi svolti*, Padova, Amon Edizioni (2013).

[T] Fabio Tramontana, *Esercizi svolti di Matematica Finanziaria*, Torino, Giappichelli Editore (2010).

[V] Ernesto Volpe di Prignano, *Lezioni di Matematica Finanziaria Classica*, Roma, CISU (2009).